

Logičko rasuđivanje u nastavi matematike

Invarijante i matematička indukcija

Matija Bašić

Međužupanijski stručni skup nastavnika matematike
9. i 10. srpnja 2013.

Rasuđivanje u nastavi matematike

- **Motivacija učenika:** intrinzični interes, primjena, natjecanje, ocjena.
- **Diferencijacija učenika:** prepoznavanje ispodprosječnih i iznadprosječnih, individualizirani pristup.
- **Ciljevi logičko-kombinatornih zadataka:** diskusija, poticanje na sudjelovanje, podizanje interesa za matematiku, razvoj kritičkog pristupa, podizanje samopouzdanja, uvod u kompliciranije teme (vjerojatnost, kombinatorika, teorija skupova...)

Wasonov problem

- Na stolu se nalaze četiri karte na kojima redom piše

$A, B, 4, 7.$

Na svakoj karti se s jedne strane nalazi broj, a s druge slovo. Koje karte moramo okrenuti kako bismo provjerili je li sljedeća izjava pogrešna?

Ako karta ima samoglasnik s jedne strane, onda ima paran broj s druge strane.

Vezice i pokretna traka

- U zrakoplovnoj luci želimo stići s jednog na drugi kraj terminala. Na nekim dijelovima tog puta koristimo pokretne trake po kojima možemo hodati. Na početku puta primjetimo da nam je odvezana vezica na cipeli. Ako želimo što prije stići, je li bitno hoćemo li vezicu zavezati na pokretnoj traci ili izvan nje?

Teme iz kombinatorike

- Logičko-kombinatorni zadaci
- Invarijante
- Matematička indukcija
- Princip ekstrema (kombinatorna geometrija)
- Dirichletov princip
- Dvostruko prebrojavanje
- Igre i algoritmi

Strategije i aspekti rješavanja problema:

analiza malih slučajeva, metoda pokušaja i pogrešaka, generalizacija, analogija, testiranje hipoteze, uočavanje simetrije, lateralno razmišljanje, redukcija (podijeli pa vladaj, svođenje na poznato).

Invarijante

- Kontekst: opisane su transformacije po kojima prelazimo iz jednog stanja u drugo
- Invarijanta: veličina koja se ne mijenja pri transformaciji
- Zaključak: nemoguće je doći iz početnog stanja u neko opisano stanje

Invarijante

- Na nekom otoku se nalazi 13 žutih, 15 plavih i 17 crvenih kameleona. Kad se dva kameleona različite boje sretnu oni istovremeno promjene boju u treću. Je li moguće da nakon nekog vremena svi kameleoni budu iste boje?

Invarijante

- Na ploči su zapisani neki cijeli brojevi. U svakom koraku odabiremo brojeve a i b koji se nalaze na ploči, obrišemo ih i umjesto njih zapišemo brojeve $3a - b$ i $13a - 3b$.

Ako su na početku dani brojevi $1, 2, \dots, 2011, 2012$, mogu li se nakon konačnog broja koraka na ploči nalaziti brojevi $2, 4, 6, \dots, 4022, 4024$?

(Državno 2012.)

Invarijante

- Dana je 10×10 pravokutna parcela zemljišta podijeljena na 100 jediničnih parcela. Neke su jedinične parcele zarasle u korov. Ukoliko neka jedinična parcela ima barem dvije susjedne koje su zarasle u korov, onda i ona zaraste u korov.

Koliki je najmanji broj jediničnih parcela zaraslih u korov takvih da postoji polazno stanje nakon kojeg se višekratnom primjenom gornjeg pravila može dogoditi da cijela parcela zaraste u korov?

(Državno 2008.)

Invarijante

- Dokažite da se pravokutna ploča dimenzija 5×7 ne može prekriti s nekoliko slojeva manjih ploča oblika kao na slici tako da svako polje velike ploče bude pokriveno jednakim brojem manjih ploča.



Matematička indukcija

- Analogija s dominama
- Tipične pogreške u provedbi koraka indukcije
- Kontraprimjer - svi ljudi imaju istu boju kosu.

Matematička indukcija

- Dokažite da ploču $2^n \times 2^n$ bez jednog kvadratića 1×1 možemo popločiti s oblicima kao na slici?



Matematička indukcija

- Ravnina je podijeljena pravcima u općem položaju na područja. Dokažite da područja možemo obojati u dvije boje (crnu i bijelu) tako da nikoja dva susjedna područja nisu iste boje.

Matematička indukcija

- Dokažite da brojeve $1, 2, 3, \dots, 2013^{2013}$ možemo poredati u niz tako da se za nikoja dva broja njihov prosjek ne nalazi između njih.

Matematička indukcija

- Formula vozi po kružnoj stazi. Uz stazu se nalaze benzinske stanice koje sve zajedno sadrže točno onoliko benzina koliko je potrebno da formula obiđe stazu. Pokažite da postoji mjesto na stazi s kojeg formula može krenuti da obiđe cijelu stazu.

Matematička indukcija

- Dokažite da svako stablo (povezan graf bez ciklusa) ima barem jedan list (vrh stupnja 1).

Literatura

Izvori zadataka:

- Andreescu T., Savchev S.: *Mathematical Miniatures*, Anneli Lax New Mathematical Library (2003)
- Engel, A.: *Problem Solving Strategies*, Springer, 1997
- Larson, L.C.: *Problem-Solving Through Problems*, Springer (1983)
- Zeitz, P.: *The Art and Craft of Problem Solving*, Wiley & Sons (2006)
- Domaća natjecanja: public.carnet.hr/mat-natj/
- IMO: <http://www.imo-official.org/>
- www.artofproblemsolving.com/Forum (mathlinks.ro)
- www.skoljka.org

Hvala na pažnji!

Kontakt: `mbasic@math.hr`

<http://web.math.pmf.unizg.hr/~mbasic/competitions.htm>