

Kako unaprijediti natjecanja (i nastavu) iz matematike?

Matija Bašić, mbasic@math.hr

Ovim tekstom želimo opisati ciljeve i očekivanja na natjecanjima, te na taj način pružiti podršku nastavnicima za dodatni rad s učenicima koji imaju izražen interes i talent za matematiku. Pritom želimo uvažiti dugu tradiciju matematičkog obrazovanja i natjecanja iz matematike u Hrvatskoj, ali i potaknuti na promišljanje o postavkama sustava u kojem razvijamo interes mladih ljudi za matematiku i pripremamo ih za život u suvremenom svijetu.

Matematika i matematičko obrazovanje u 21. stoljeću

Obrazovanje se posljednjih desetljeća u sve većoj mjeri okreće razvoju generičkih kompetencija koje su potrebne za osobni razvoj pojedinca, aktivno uključivanje u društvo i osiguravanje dobrih mogućnosti zapošljavanja u sklopu kompetitivnog tržišta rada. Moderno društvo ne zahtijeva od pojedinca samo osnovne vještine (računanje, pismenost) i poznavanje činjenica, već vještine koje omogućavaju uklapanje u dinamične i nepredvidive okoline. Mogli bismo reći (u kontekstu Bloomove taksonomije) da se ishodi učenja u modernoj nastavi pomiču od nižih kognitivnih procesa (reprodukcije znanja, razumijevanja i primjene) ka višim kognitivnim procesima (analizi, sintezi i evaluaciji).



Nastava matematike, možda više nego bilo kojeg drugog predmeta, razvija te kompetencije kroz poticanje kritičkog i apstraktnog razmišljanja.

Nacionalni okvirni kurikulum (NOK) izjednačio je važnost matematičkih procesa i domena, naglašavajući time važnost razvoja općih kompetencija u suvremenom obrazovanju. NOK znanja iz matematičkog područja organizira u *Domene*: brojevi, algebra i funkcije, oblik i prostor, mjerenje, podatci i infinitezimalni račun.

Za ostvarivanje ciljeva matematičkog obrazovanja jednako je važno (možda i važnije) poticati razvoj *Procesa*: prikazivanje i komunikacija, povezivanje, logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje, rješavanje problema i matematičko modeliranje, primjena tehnologija.

Nastavnik matematike može biti ključna osoba u razvoju pojedinca ako potiče samostalnost i razvija samopouzdanje učenika, pokazuje da su pogreške sastavni dio života koji omogućava bolje razumijevanje, potiče preuzimanje odgovornosti i otkrivanje vlastitog pristupa u rješavanju problema, ističe temeljnu ulogu matematike u razvoju modernog društva, prenosi vlastiti žar za bavljenje matematikom, pokazuje na koji način se matematika pojavljuje u svakodnevnom životu i kako se primijeni, motivira, te pomaže u nošenju s pritiskom i problemima s okolinom. Mentor ne može dati učeniku recept za rješavanje svakog pojedinog problema (matematičkog zadatka ili, općenitije, životne situacije) te ne treba znati riješiti sve zadatke s natjecanja. Uloga mentora stoga nije u prvom redu da predaje i podučava, već da pruža podršku mladoj osobi u autonomnom razvoju svojih vještine i stavove.

Natjecanja iz matematike su oduvijek orijentirana na istraživački pristup podučavanju koji osigurava razvoj općih kompetencija. Budući da je danas i redovna nastava sve više usmjerena na takav način učenja i podučavanja, možemo reći da se ovaj tekst odnosi na rad sa svim učenicima, a ne samo natjecateljima.

Načela i ciljevi natjecanja iz matematike

Glavni cilj natjecanja iz matematike je poticanje učenika na bavljenje matematikom i maksimalno korištenje svojih potencijala za rješavanje problema.

Osnovna načela na kojima je organiziran trenutni sustav natjecanja su

1. pravednost i transparentnost;
2. poticanje izvrsnosti;
3. promicanje znanosti kao pokretača razvoja modernog društva;
4. popularizacija matematike i uključivost svih učenika;
5. sinergijsko djelovanje svih sudionika.

Pravednost i transparentnost su preduvjeti za osiguravanje zadovoljstva učenika koji su uključeni u sustav natjecanja, te uključivanje svih učenika bez obzira na geografsku ili drugu pripadnost. Godinama su učenici bili nezadovoljni jer kriteriji izbora olimpijske ekipe nisu bili javni ni formalno definirani. Također, po kuloarima se govorilo o pristranosti i neujednačenosti kriterija pri ispravljanju testova na županijskoj razini (bez obzira na službene naputke za bodovanje). Dvije velike mjere su adresirale ove probleme u proteklom godinama: revizija županijskog natjecanja i uvođenje Hrvatske matematičke olimpijade (HMO).

Revizija županijskog natjecanja je opsežna promjena koju nije bilo moguće izbjeći obzirom na situaciju na terenu. Nepravilnosti u pojedinim županijama zahtijevale su hitnu intervenciju. Iako je u prvoj godini revizija uvedena naglo i neočekivano, iskustva u svakoj sljedećoj godini provođenja pokazuju kako je dugoročno ta promjena naišla na odobravanje svih sudionika

natjecanja i predstavlja veliki iskorak u sustavnom osiguravanju kvalitete natjecanja.

HMO osigurava ravnopravnu borbu za mjesto u ekipama za međunarodna natjecanja najboljim učenicima iz svih razreda srednje škole, uz uvid u rezultate natjecanja i mogućnost žalbe. Natjecanje se provodi u tri kola čime se ublažava utjecaj sreće i vanjskih utjecaja na rezultate, a visoka kvaliteta testova i jasna pravila čine natjecanje respektabilnim. Velik broj testova pruža učenicima kvalitetnu bazu zadataka za pripremu i dodatni motiv za usavršavanje.

Iskustva pokazuju da je za poboljšavanje rezultata natjecatelja na samom vrhu vrlo važno povećati konkurenciju, što se osigurava širokom bazom učenika koji sudjeluju na nižim razinama. Na primjer, na razinu pripremljenosti i rezultate naših natjecatelja na Međunarodnoj matematičkoj olimpijadi (IMO) vrlo pozitivno utječe sudjelovanje Hrvatske na Srednjoeuropskoj matematičkoj olimpijadi (MEMO). Prema pravilima, MEMO ekipu čine učenici koji nisu u ekipi za IMO, a njihovo uključivanje u pripremni ciklus u ranijoj dobi osigurava bolju pripremljenost u trenutku kad postanu članovi IMO ekipe. Ovakvi primjeri najbolje pokazuju kako su popularizacija i poticanje izvrsnosti često isprepleteni.

Unatoč evidentnoj želji za povećanjem broja sudionika na natjecanjima, u praksi se suočavamo s nezadovoljstvom učenika (i njihovih mentora) rezultatima na nižim razinama. Mentori posebno ističu problem učenika koji s interesom prate dodatnu nastavu matematike, ali na natjecanjima ostvaruju demotivirajuće rezultate. Uzmemo li u obzir da su sposobnosti učenika koji vole matematiku i žele se natjecati različite, teško je ostvariti sve ciljeve u isto vrijeme. S jedne strane, na nižim razinama (školsko natjecanje) nastojimo uključiti što veći broj učenika, dok s druge strane

kroz sustav od samo četiri razine (školska, županijska, državna, HMO) nastojimo odabrati *najbolje među najboljima* i osigurati vrhunske rezultate naših predstavnika na međunarodnim natjecanjima. Neki od mogućih razloga za ovakvu situaciju su premali broj razina, način pripreme za natjecanja i različita očekivanja od natjecanja. O tim aspektima želimo više govoriti u nastavku teksta.

Odnos učenika i mentora

Svaki natjecatelj pristupa natjecanjima kroz prizmu svojih rezultata i prirodno je njegov cilj biti bolji od drugih. No jedino učenik koji voli matematiku i koji je intrinzično motiviran može godinama ustrajati u pripremi za natjecanje i ostvarivati dobre rezultate. S druge strane, mentor zna da glavni cilj sudjelovanja na natjecanju nije rezultat i svoju ulogu pronalazi u pružanju podrške učeniku za uspješno nošenje sa stresom te kontinuirani razvoj interesa za matematiku.

Prema načinu na koji se nose sa stresom, učenike možemo podijeliti u dva tipa. Neki učenici su izrazito kompetitivni i na natjecanjima ostvaruju svoj maksimum. Oni se natječu kako bi pobijedili druge natjecatelje i adrenalin ih potiče da riješe više zadataka nego kod kuće.

Drugi tip učenika su oni koje stres blokira i koji nerijetko na natjecanjima imaju lošije rezultate od očekivanih. Takvi učenici prije natjecanja loše spavaju ili osjećaju mučninu, a za vrijeme natjecanja rade pogreške koje im inače nisu svojstvene. To su najčešće učenici koji vole matematiku, ali ne vole natjecanja. Oni se natječu zbog nedostatka drugih poticajnih i izazovnih aktivnosti u sustavu obrazovanja kroz koje bi razvijali svoje interese.

Mentor ne treba nikad odlučivati umjesto učenika je li učenik spreman za natjecanje, ali mu mora pomoći u samoprocjeni i pružiti informa-

cije što ga očekuje. U tome je važno potaknuti učenika da riješi zadatke zadane prijašnih godina na istoj razini natjecanja za koju se učenik priprema, te nakon natjecanja pomoći učeniku da na pozitivan način sagleda ishod.

Natjecatelji mogu biti nezadovoljni svojim rezultatom zbog raznih razloga. Neki učenici marljivo rješavaju zadatke i pripremaju se za natjecanja tijekom čitave godine, a na samom natjecanju ipak ne postignu željeni rezultat. Mogući razlozi za to su neadekvatna priprema ili nerealistična očekivanja. Mentor može i treba pomoći učeniku razgovorom o svim tim psihološkim aspektima natjecanja.

Mentor ima najveći utjecaj u poticanju pozitivnih stavova prema matematici i učenju, te svojim entuzijazmom može stvoriti ozračje koje omogućava uključivanje u dodatnu nastavu većem broju učenika, Natjecateljima je sudjelovanje na natjecanjima iznimno važno, te mnogi učenici osim vremena i truda ulažu i mnogo emocija. Istovremeno, sam sustav daje vrlo šturu povratnu informaciju (uglavnom isključivo u obliku bodovnog rezultata i pozicije na određenoj razini natjecanja), pa je za emocionalni razvoj natjecatelja izrazito važna dodatna podrška koju može pružiti mentor. Uz pomoć u nošenju s vlastitim očekivanjima, mentor učeniku može pomoći da se nosi s vanjskim pritiscima (roditelja, vršnjaka), može ga i mora zaštititi od vršnjačkog rугanja, te može poticati suradništvo i međusobno uvažavanje svih učenika.

Nastavniku će uloga mentora biti puno lakša ako je iskren prema sebi, a onda i prema svojim učenicima. Prije svega, tu podrazumijevamo iskrenost u pogledu vlastitog znanja i vještina, što se prirodno vezuje uz pitanje autoriteta. Stvaran autoritet ne proizlazi iz međusobnog odnosa (nadređeni-podređeni), već ga učenik prepoznaje u mentoru koji mu može pomoći

svojim znanjem i iskustvom. Jedino ako je tako uspostavljen, autoritet omogućava partnerski odnos učenika i mentora.

U radu s talentiranom djecom vrlo je važno pristupiti mladim ljudima s poštovanjem, te prihvaćati i poticati činjenicu da učenici moraju postati uspješniji od svojih mentora. Neizbježno je da mentor zna manje specifičnih teorema ili natjecateljskih zadataka od svojih učenika, ali treba biti svjestan da ima puno bogatije iskustvo, da može pružiti učenicima potrebnu pomoć i da svojim savjetima može odigrati presudnu ulogu u njihovom razvoju. Čak i najbolji natjecatelji trebaju podršku u vidu zapisivanja rješenja, odabira materijala i pristupa učenju, a dobar mentor zna kako na balansiran način prepustiti odgovornost i autonomiju za učenje svom učeniku.

Očekivanja na natjecanjima

Sudjelovanje na državnom natjecanju velika je čast i izazov za svakog natjecatelja. Zato učenici često komentiraju da je županijsko natjecanje razina na kojoj većina osjeća najveći pritisak. Na županijskoj se razini po kategoriji odabire 20 od 150 (ili više) učenika koji će biti pozvani na državno natjecanje. Relativno mala prolaznost čini županijsko natjecanje ispitom visokog rizika.

Glavna mjera koja osigurava pravedan odabir pozvanih učenika je dovoljno nizak bodovni prag. Visok bodovni prag bi doveo do situacija u kojima velik broj učenika ima isti ili približni broj bodova, a razlike se temelje na malim, nerijetko računskim, pogreškama. Kroz godine se pokazalo da je idealni bodovni prag između 30 i 35 od 50 bodova. Zbog toga moramo očekivati da će više od 130 učenika po kategoriji ostvariti između 0 i 30 bodova.

U ovome se očituje nepomirljivost popularizacijskog karaktera natjecanja i stremljenja

ka pravednom odabiru najboljih natjecatelja. Odabir olimpijske ekipe i sve veća pripremljenost naših najboljih natjecatelja diktiraju standard najviših razina natjecanja, a stroga selekcija doprinosi percepciji velikih razlika u rezultatima učenika na nižim razinama. Za neke učenike ta činjenica je razočaravajuća. No, bitno je naglasiti da spuštanje kriterija ni na kojem ispitu ne donosi dugoročni napredak niti zadovoljstvo pojedinaca. U nastojanjima da pružimo emocionalnu podršku učenicima moramo naglasiti važnost rada i ustrajati na stavu da veću vrijednost imaju ostvarenja koja postizemo uz više truda i uz osobni razvoj.

U situaciji u kojoj nadležno vlasti nemaju budžet koji bi osigurao veći broj razina, poželjno je da škole samostalno organiziraju predrazine natjecanja lokalnog karaktera na kojima bi zainteresirani učenici mogli ostvariti motivirajuće rezultate, usporediti se s učenicima iz drugih razreda ili škola, te samostalno procijeniti svoje sposobnosti. Također, svakako bismo preporučili da bodovni pragovi za plasman sa školske na županijsku razinu ne bude previsok, tj. da broj učenika koje županije pozivaju na županijsko natjecanje ne bude premali. Uključivanje što većeg broja učenika i poticanje izvrsnosti dva su osnovna načela koja u budućnosti treba i dalje nastojati provoditi na način da se međusobno ne isključuju.

Osim povećanja broja razina, kao mjere za poboljšanje sustava natjecanja vidimo povećanjem sinergijskog djelovanja svih sudionika natjecanja što je moguće ostvariti kroz povećanje komunikacije između državnog povjerenstva i mentora, organizaciju skupova na kojima se olakšava razmjena iskustava mentora, te pružanju podrške mentorima kroz radionice i dodatne materijale. U nastavku teksta zato donosimo smjernice za pripremu za dodatnu nastavu.

Vještina rješavanja problema

Brookhart (2010) definira sljedeće više oblike mišljenja:

- transfer (upotreba) – mogućnost prisjećanja i primjene u stvarnim situacijama;
- kritičko razmišljanje – procjena kredibiliteta izvora informacija, identifikacija hipoteza, razumijevanje svrhe pisanog teksta, kritika efikasnosti strategija;
- rješavanje problema – situacije u kojima želimo postići specifični cilj, ali ne vidimo put ili rješenje kako cilj postići.

Rješavanje problema (engl. problem solving) ključna je vještina za svakodnevni život, a posebno ju razvijamo kroz natjecanja iz matematike. Upravo ta usmjerenost razlikuje natjecanja iz matematike (i srodnih prirodoslovnih predmeta) od natjecanja u znanju u kojima se učenici natječu u poznavanja školskog gradiva. Na natjecanjima iz matematike učenici rješavaju originalne zadatke koji se ne mogu naći u udžbenicima, te zahtijevaju kreativnost.

Specifično, u rješavanju problema koristimo sljedeće strategije:

- prisjećanje relevantnih situacija, informacija i metoda;
- samostalno ispitivanje posebnih slučajeva;
- otkrivanje uzorka koristeći vlastitu logiku;
- postavljanje hipoteze;
- dokazivanje i opovrgavanje hipoteze;
- konstruiranje primjera i kontraprimjera za svoje slutnje;
- kombinirana primjena razmišljanje unatrag i unaprijed;

- formuliranje kreativnih alternativa;
- stvaranje i izvršavanje plana rješavanja problema;
- kritičko evaluiranje ideja.

Dodatna nastava iz matematike

Ključna poruka o pripremi za dodatnu nastavu glasi: **rješavanja problema i ostale opće kompetencije možemo razvijati kroz bilo koji sadržaj.**

To je posebno bitna poruka za sve mentore koji imaju osjećaj da u satnici nemaju vremena pokriti *sve moguće metode*. Bitno je znati da nikad ne možemo pokriti sve metode, ali još važnije je naglasiti da je to pogrešan pristup. Naime, kroz dodatnu nastavu ne smijemo pripremati učenike za određene tipove zadataka. Uz takav način rada učenici isključivo rješavaju samo one zadatke koji su slični nekima koje su već vidjeli. Tu nema rješavanja problema.

Uz preporuke koje daje NOK, možemo sažeto reći da nastavom matematike nastojimo ostvariti da učenik

- koristi matematičke metode i alate s razumijevanjem;
- koristi matematički jezik, uvodi vlastite oznake i pomoćne elemente sa svrhom;
- pristupa zadacima koje nije prije vidio sa samopouzdanjem da ih može riješiti;
- uspješno artikulira i prenosi svoje misli drugima (pismeno i usmeno);
- koristi tehnologiju u rješavanju problema i učenju;
- samostalno uči i traži materijale vezane uz određenu temu;

- svjesno koristi strategije rješavanja problema;
- kritički pristupa svom radu;
- slijedi svoju prirodnu znatiželju i pokazuje želju za učenjem;
- preuzima odgovornost za svoje učenje i napredovanje;
- ima realistična očekivanja;
- prepoznaje ulogu matematike u razvoju modernog društva.

Danas je općeprihvaćeno da je u ostvarivanju ovih ishoda efikasno koristiti metodologiju učenja istraživanjem (engl. *inquiry based learning*), što znači da učenici samostalno otkrivaju ključne ideje za rješavanje zadatka uz minimalne intervencije nastavnika. Upute koje nastavnik daje odnose se na općenite strategije rješavanja problema, a ne na rješenje zadatka (umjesto upute *uočiti četverokut* ili *pogledaj jednadžbu modulo 5*, pitamo učenika sjeća li se nekog sličnog zadatka, može li reformulirati zadatak, pomaže li mu rješavanje jednostavnijih slučajeva, je li iskoristio sve zadane podatke itd).

Posebno je važno planirati vrijeme za razvoj metakognitivnih sposobnosti - prokomentirajte s učenicima što su naučili, kako su zapisali rješenja i što misle o zadacima za samostalan rad. U pripremi sami prođite kroz zadatke u nekoliko prethodnih godina za određenu razinu natjecanja i razmislite o vještinama koje su potrebne za njihovo rješavanje. Napišite ciljeve i ishode učenja koje ćete moći pratiti (npr., uspješno i ispravno korištenje oznaka, svrhovito uvođenje novih veličina i pomoćnih elemenata itd.) i podsjetite učenike da je rad najvažniji preduvjet uspjeha.

Kao podsjetnik za pripremu dodatne nastave možete koristiti sljedećih pet točaka.

- SVRHA: pri uvođenju oznaka i dodatnih elemenata objasniti svrhu – je li svrha nama poznata? jesmo li samostalno došli do onoga o čemu pričamo?
- PLAN: planirati vrijeme za pitanja, poticati raspravu – pripremite se da će rasprava otići u neočekivanom smjeru za što ćete morati biti fleksibilni.
- JASNOĆA: jasno uvesti nove koncepte (pojmove, metode), naglasak na malom broju ključnih osnovnih koncepata, nije dobro poticati preskakanje gradiva.
- PODRŠKA: pronaći ravnotežu u odnosu, poticanje u inicijalnim fazama, strpljivost, pažljivo prepuštanje odgovornosti učeniku da preuzme inicijativu, poticanje samostalnosti, ohrabrivanje.
- METAKOGNICIJA: osvijestiti strategije i više oblike razmišljanja koje koristimo, mijenjati kontekst, povezivati sa primjenama.

Vrednovanje natjecatelja

Učenici kroz rezultate na natjecanju dobivaju povratnu informaciju o razini svojih postignuća, ali ta informacija se prvenstveno odnosi na postignuća u odnosu na druge učenike. Tek u manjoj mjeri, ovisno o sklonosti ka samo-refleksiji, učenici iz svojeg nastupa mogu izvući zaključke o svojim sposobnostima rješavanja problema i mogućnostima za poboljšanje. Zato možemo reći da natjecanja predstavljaju oblik sumativnog vrednovanja (tzv. vrednovanja naučenoga), pri čemu to vrednovanje nije kriterijsko, već normativno. Tu činjenicu treba prihvatiti kao prirodnu postavku sustava. Naime, Državno povjerenstvo na natjecanjima iz

matematike nastoji zadati originalne zadatke koji ispituju kreativnost, što u određenoj mjeri onemogućava jednakost kriteriji ispitivanja na određenoj razini natjecanja svake godine.

Budući da su natjecatelji već usmjereni na svoj rezultat, a natjecanje će pružiti vanjsko sumativno vrednovanje, najvažniji oblici vrednovanja koje treba uklopiti u dodatnu nastavu matematike je formativno vrednovanje (tzv. vrednovanje za učenje i vrednovanje kao učenje). Glavna funkcija takvog vrednovanja je usmjeravanje i poboljšanje učenja, što se ostvaruje kroz poticanje učenika na učenje iz vlastitih pogrešaka i davanje konstruktivnih prijedloga za daljnji rad. Primjeri popularnih aktivnosti koje omogućavaju takvo vrednovanje su projektni zadaci (npr. učenici samostalno obrađuju zadanu temu), vođenje mape s riješenim/poučnim zadacima i interne simulacije natjecanja. Preferiranje formativnih oblika vrednovanja u skladu je s naglaskom na razvoju općih kompetencija. Tako je vrlo korisno poticati samovrednovanje jer njegovim uključivanjem dodatno potičemo učenike na aktivan pristup i olakšavamo stvaranje realističnih očekivanja.

Vrednovanje na natjecanjima

Najvažniji preduvjeti za dobivanje vjerodostojne povratne informacije na natjecanju su ujednačeni kriteriji, te stručno i objektivno ispravljanje. Te preduvjete je lakše osigurati na višim razinama natjecanja na kojima sudjeluje manji broj učenika. U idealnoj situaciji za vrednovanje na natjecanjima ispravljač može prvo pročitati radove svih natjecatelja i nakon toga utvrditi kriterije koji obuhvaćaju sve načine rješavanja koji se pojavljuju u tim radovima. Budući da to nije moguće na nižim razinama natjecanja, objektivnost i ujednačenost ispravljanja se osigurava korištenjem unaprijed propisanih bodovnih kriterija kojima se predviđa što je više moguće načina rješava-

nja. Sva povjerenstva dužna su pridržavati se tih kriterija, a u slučaju da se ispravljač suoči s rješenjem koje nije predviđeno na raspolaganju ima mogućnost konzultacija s dežurnim članom Državnog povjerenstva. Svakako, tu mogućnost treba koristiti bez nelagode jer su svi sudionici svjesni zahtjevnosti ispravljanja velikog broja zadataka u malo vremena s kojima se suočavaju lokalna povjerenstva na školskoj i županijskog razini.

Ustaljena je praksa da se učenici koji nisu zadovoljni rezultatom mogu žaliti povjerenstvu koje je ispravljalo njihov test. Uvidi nakon natjecanja moraju postojati jer se greške uvijek mogu dogoditi, a razgovor učenika i ispravljača nakon natjecanja treba osiguravati transparentnost i postati mjesto na kojem učenici dodatno uče od iskusnijih nastavnika.

No, upravo u tom aspektu natjecanja možemo uvidjeti neke od slabih točaka sustava natjecanja. I učenici i nastavnici negoduju na ponašanje za vrijeme žalbi. S jedne strane učenici se žale da ispravljači ne uvažavaju alternativne načine rješavanja i prerestriktivno ocijenjuju njihove radove, dok nastavnici prijavljuju da učenici vrše pritisak kako bi dobili veći broj bodova te pokazuju manjak respekta. Od situacije do situacije ishodi su različiti i korisno je osiguravati objektivnost natjecanja dodatnim revizijama i povećanjem vremena koje ispravljači mogu posvetiti ocijenjivanju.

Vrlo važan aspekt je i ostvarivanje uzajamnog poštovanja i autoriteta, što se može temeljiti isključivo na znanju i ravnopravnosti u argumentiranoj diskusiji. Mladi ljudi će najbrže prihvatiti kulturu međusobnog uvažavanja ako im se pristupa s poštovanjem i u najbolji namjeri im se strpljivo objasni u čemu griješe. Zbog toga su vrednovanje i ispravljanje na natjecanjima, te tretiranje žalbi vrlo poželjna tema za međuzupanijske skupove i radionice za nastavnike.

Dodatna literatura

U nadi da ćemo mentorima i učenicima pomoći u postavljanju očekivanja i olakšati pripremu godišnjeg plana za dodatnu nastavu, donosimo pregled osnovnih tema po područjima uz naputke o poželjnim ishodima. U pripremi tema može poslužiti raznovrsna literatura, a baza materijala nastalih na temelju priprema međunarodnih ekipa nalazi se na stranici

natjecanja.math.hr

Sljedeće knjige obuhvaćaju teme iz svih područja. Većinom su podijeljene prema temama (nejednakosti, princip ekstrema...) ili strategijama rješavanja. Obiluju primjerima i uputama za rješavanje problema, te zadacima za samostalno rješavanje s rješenjima.

1. Arthur Engel, *Problem Solving Strategies*
2. Paul Zeitz, *The Art and Craft of Problem Solving*
3. Loren C. Larson, *Problem-Solving Through Problems*
4. Svetoslav Savchev, Titu Andreescu, *Mathematical Miniatures*
5. Babinskaja, *Zadaci s ruskih matematičkih olimpijada*
6. Dušan Djukić et al., *IMO Compendium*
7. Željko Hanjš, *Međunarodne matematičke olimpijade*
8. George Polya, *Kako riješiti matematički zadatak? (How to solve it?)*
9. George Polya, *Matematičko otkriće*
10. Yufei Zhao,
<http://yufeizhao.com/olympiad.html>
11. Titu Andreescu et al., *Problems Around the World* (zbirke 1996-97, 1997-98, 1998-99, 1999-2000, 2000-01)

U sklopu pregleda tema po područjima donosimo dodatnu literaturu.

Pregled tema po područjima

Tradicionalno, na natjecanjima iz matematike koristimo podjelu na četiri područja: algebra, kombinatorika, geometrija, teorija brojeva. U pripremi za natjecanje vrlo je korisno znati da su sva četiri područja zastupljena na svim razinama u podjednakoj mjeri.

Za usporedbu s NOK-om, možemo navesti da je domena algebra i funkcije ono što opisujemo područjem algebra, domene oblik i prostor te mjerenja opisujemo područjem geometrija, a domenu brojevi područjima teorija brojeva i kombinatorika. Teme iz domena podatci i infinitezimalni račun se tradicionalno ne pojavljuju na natjecanjima zbog male zastupljenosti u kurikulumu (na nacionalnom i međunarodnom nivou).

Naravno, kao što smo već obrazložili svi procesi navedeni u NOKu su vrlo važni u rješavanju natjecateljskih zadataka i razvijaju se kroz sve teme svih područja. Posebnu pažnju želimo skrenuti na područje kombinatorika koje u najmanjem opsegu ima preklapanja s redovnim gradivom, a koje je najpogodnije za razvoj svih matematičkih procesa. Zbog toga kombinatorno-logički zadaci postaju sve zastupljeniji na natjecanjima.

U ovom pregledu za svako područje donosimo popis osnovnih tema, te primjere zadataka koji su proteklih godina bili zadani na školskoj razini natjecanja. Takvi zadaci mogu poslužiti nastavnicima u poticanju rješavanja problema i oplemenjivanju nastavnog programa i u dodatnoj i u redovnoj nastavi.

Algebra

Ovo područje u najvećoj mjeri sadrži teme povezane sa školskim gradivom, posebno one teme koje su u NOKu nevedene pod domenom algebra i funkcije. Za razliku od zadataka s redovne nastave, u zadacima na natjecanjima pojavljuje se više tema istovremeno. Učenike treba poticati da uče s razumijevanjem tako da prisjećanje i izvođenje svojstava elementarnih funkcija temelje na definicijama i nekoliko osnovnih svojstava (npr. na temelju adicijske formule za sinus mogu izvesti formulu za sinus dvostrukog kuta ili umnožak sinusa i kosinusa, na temelju eksponencijalne formule mogu izvesti formulu za logaritam zbroj itd.)

Najveću pažnju potrebno je posvetiti vještini manipuliranja algebarskim izrazima jer se koristi u gotovo svim algebarskim zadacima. Uz to, ističemo važnost razumijevanja pojma funkcije i koncepta dokazivanja nejednakosti. Treba imati na umu da u zadacima u kojima treba dokazati neku nejednakost težina zadatka leži u logičkim koracima i algebarskim manipulacijama, a ne primjeni teorema.

Osnovne teme iz algebre:

- skupovi - korištenje i razumijevanje oznaka za skupove i osnovne skupovne operacije (unija, presjek, komplement)
- brojevi - osnovne računske operacije i karakteristična svojstva skupova racionalnih i realnih brojeva (decimalni brojevi, aproksimacije, uređaj, od 1.r.) te kompleksnih brojeva (konjugiranje, algebarska zatvorenost, od 2.r.)
- algebrski izrazi - korištenje nepoznanica, parametara i općih brojeva, manipuliranje algebarskim izrazima, rješavanje (ne)jednadžbi i sustava, uključujući ideju supstitucije

- nejednakosti (dodatna tema na svim razinama osim školske razine u 1.r.) -

školska razina: razumijevanje pojma nejednakosti i dokazivanje korištenjem činjenice da je kvadrat realnog broja nenegativan broj (ili ekvivalentno korištenje AG-nejednakosti s dva člana)

županijska i državna razina: složeniji zadaci koji koriste nejednakosti među sredinama s proizvoljno mnogo članova, nejednakost Schwarz-Cauchy-Buniakowski

- računanje konačnih zbrojeva (Gaussova dosjetka, rastav na parcijalne razlomke, teleskopiranje, od 1.r.)
- korištenje matematičke indukcije u dokazivanju algebarskih tvrdnji, nizovi i redovi (4.r.)
- pojam funkcije, svojstva elementarnih funkcija i njihovih *grafova* -
 - funkcija najveće cijelo (od 1.r.),
 - linearna funkcija, (veza s proporcionalnošću, 1.r.),
 - kvadratna funkcija i polinomi višeg stupnja (značenje diskriminante, traženje nultočaka, Vieteove formule, 2.r.),
 - eksponencijalna i logaritamska funkcija (eksponencijalna formula, monotonost, pojam inverza, od 3.r. na natjecanjima),
 - trigonometrijske funkcija (adicijske formule, izvođenje ostalih formula, periodičnost, ograničenost 3.r.)
- funkcijske jednadžbe (4.r.)

Dodatna literatura iz algebre:

- Kiran Kedlaya, $A < B$ (A is less than B)
- Titu Andreescu, Zuming Feng, *101 Problems in Algebra*
- B. J. Venkatachala, *Functional Equations: A Problem Solving Approach*
- Radmila Bulajich Manfrino et al., *Topics in Algebra and Analysis*

Primjeri laganih zadataka iz algebre za školsku razinu:

1. Neka su a i b pozitivni realni brojevi takvi da je $a^3 + b^3 = 2ab(a + b)$.

Odredi $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}$. (školsko 2015, 1.r.)

Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: manipuliranje algebarskim izrazima (formule za kvadrat binoma i zbroj kubova), matematička preciznost koja se ogleđa u komentiranju situacija u kojima dijelimo s izrazom koji je potencijalno 0.

2. Anja i Vanja su sudjelovale u utrci. Broj trkača koji su završili utrku prije Anje jednak je broju trkača koji su završili nakon nje. Broj trkača koji su završili utrku prije Vanje je tri puta veći od broja trkača koji su završili nakon nje. Točno 10 trkača završilo je utrku između Anje i Vanje. Ako su svi trkači završili utrku, te nikoja dva trkača nisu završila u isto vrijeme, odredi ukupan broj trkača. (školsko 2016, 1.r.)

Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: čitanje s razumijevanjem, uvođenje dodatnih oznaka, matematičko modeliranje, manipuliranje algebarskim izrazima, rješavanje linearne jednačbe ili sustava dvije linearne jednačbe.

3. Odredi sve realne brojeve c za koje je jedno rješenje kvadratne jednačbe

$$27x^2 - 12x + c = 0$$

kvadrat drugog rješenja.

(školsko 2016, 2.r.)

Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: čitanje s razumijevanjem, Viete-ove formule za kvadratnu funkciju, rješavanje kvadratne jednačbe.

4. Odredi sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi

$$|z^2 - i| = 1 \quad , \quad |z| = \sqrt{2}.$$

(školsko 2014, 2.r.)

Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: zapis kompleksnog broja preko njegovog realnog i imaginarnog dijela, rješavanje sustava koji se svodi na kvadratnu jednačbu.

5. Dokaži da je

$$\log_2 \left(1 + \frac{1}{1} \right) + \log_2 \left(1 + \frac{1}{2} \right) + \dots \\ + \log_2 \left(1 + \frac{1}{2014} \right) < 11.$$

(školsko 2014, 3.r.)

Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: poznavanje formule o logaritmu produkta, korištenje teleskopiranja (ne nužno pod tim imenom), razumijevanje koncepta nejednakosti, korištenje monotonosti logaritamske funkcije.

6. Odredi sve vrijednosti koje može poprimiti izraz

$$\frac{1 + \cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^2 x},$$

pri čemu je x realni broj.

(školsko 2015, 3.r.)

Znanja i vještine potrebni za rješavanje

zadatka: manipuliranje algebarskim izrazima, korištenje standardnih svojstava funkcija sinus i kosinus i veze sinusa i kosinusa istog argumenta, ideja o transformaciji izraza (svođenje na funkciju u jednoj varijabli npr. $\sin 2x$), razumijevanje koncepta slike funkcije (ne nužno pod tim imenom) i poznavanje slike funkcije sinus.

7. Nikola je zamislio pet brojeva. Prvi broj koji je zamislio je -2 , a peti je 6 . Prva četiri broja su uzastopni članovi aritmetičkog niza, a zadnja tri su uzastopni članovi geometrijskog niza. Koje je brojeve Nikola zamislio? (školsko 2014, 4.r.)

Znanja i vještine potrebni za rješavanje

zadatka: definicija aritmetičkog i geometrijskog niza, korištenje oznaka, čitanje s razumijevanjem i zapisivanje uvjeta zadanih riječima matematičkim formulama, rješavanje kvadratne jednadžbe.

8. Neka je n prirodni broj i neka je $S_n = \sum_{k=1}^n k!(k^2 + k + 1)$. Izračunaj $\frac{S_n + 1}{(n + 1)!}$. (školsko 2015, 4.r.)

Znanja i vještine potrebni za rješavanje

zadatka: poznavanje oznaka za zbroj i faktorijel, postavljanje hipoteze, dokazivanje tvrdnje matematičkom indukcijom.

Kombinatorika

U području kombinatorika metode dokazivanja su mnogo važnije od bilo kakvih teoretskih rezultata. Zadaci ne zahtijevaju nikakvo posebno predznanje, već prvenstveno logičko

razmišljanje. Takvi zadaci vrlo izraženo razvijaju sve matematičke procese (opisane NOK-om). Zato je za zadatke ovakvog tipa posebno važan popis strategija za rješavanje problema koje smo naveli ranije u tekstu. Učenicima je u ovom području najteže formulirati svoje misli i opažanja, pa teme koje navodimo treba prepoznati i podučavati kao alate koji omogućavaju precizno matematičko izražavanje i formuliranje valjanih dokaza.

Prema načinu na koji su postavljeni, zadatke možemo neformalno podijeliti u tri kategorije. Prvi tip zadataka su oni u kojima je potrebno pokazati da je neka situacija moguća. U nekim zadacima možemo dati eksplicitnu konstrukciju ili konstrukciju napraviti manje direktno koristeći matematičku indukciju. U nekim drugim zadacima postojanje pokazujemo na nekonstruktivan način, npr. koristeći Dirichletov princip možemo pokazati da objekt s traženim svojstvom postoji, iako ga ne možemo opisati eksplicitno.

U drugom tipu zadataka pokazujemo da neka situacija nije moguća. Osim eksplicitne konstrukcije kontraprimjera kojim pokazujemo da tvrdnja ne vrijedi, nemogućnost dokazujemo koristeći invarijante. Invarijante ili stalne veličine su svojstva koja se ne mijenjaju dok vršimo određeni proces. Koristimo ih kako bismo pokazali da uz zadane pretpostavke (početno stanje) nije moguće ispuniti tražene uvjete (završno stanje). Učenici uspješno koriste invarijante već u osnovnoj školi iako ih ne zovu tako. Na primjer, bojanje ploču na šahovski način ili promatranje parnost neke veličine.

Treći tip su zadaci u kojima je potrebno odrediti broj načina da se ostvari neka situacija, tj. to su zadaci iz prebrojavanja. Osnovne principe prebrojavanja velik broj učenika savlada već u osnovnoj školi. Kod zahtjevnijih zadataka učenici dobivaju pogrešna rješenja zbog

logičkih grešaka u većoj mjeri nego kod zadatka iz drugih područja. Takve pogreške su jako dobar poticaj za diskusiju, te će ih mentor iskoristiti za razgovor o različitim pristupima rješavanju zadatka.

Iskustvo govori da učenicima treba posebnu pažnju osvrnuti na zadatke u kojima se traži neka optimalna situacija (najmanji ili najveći broj takav da...). U tim zadacima rješenje uvijek ima dva bitno različita dijela. U jednom dijelu rješenja pokazujemo da se odgovor može postići (npr. primjerom), dok u drugom dijelu pokazujemo da odgovor ne možemo poboljšati (npr. dvostrukim prebrojavanjem, Dirichletovim principom ili nekom drugom metodom).

Osnovne teme iz kombinatorike:

- logički zadaci (osnovna škola);
- Dirichletov princip (osnovna škola);
- prebrojavanje – osnovni principi (1.r. školsko), dvostruko prebrojavanje (županijska i državna razina);
- invarijante (stalne veličine)

školska razina: jednostavne invarijante koje učenici sretnu već u osnovnoj školi, poput parnosti, ostataka pri dijeljenju i bojanja;

županijska i državna razina: složenije invarijante algebarskog tipa;
- princip ekstrema (u što ubrajamo i metodu beskonačnog spusta);
- zadaci optimizacije - dokazivanje ograde i konstrukcija primjera
- matematička indukcija (kao dodatna tema 3. r. na županijskoj razini i od 4. r. na školskoj razini).

Dodatna literatura iz kombinatorike:

- Mario Krnić, *Dirichletov princip*
- Maja Cvitković, *Kombinatorika*
- Darko Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*
- skripte za predavanja i vježbe iz kolegija *Diskretna matematika*, PMF-MO
- Titu Andreescu, Zuming Feng, *102 Combinatorial Problems*
- Jiri Herman et al., *Counting and Configurations*
- Pablo Soberón, *Problem-Solving Methods in Combinatorics*

Primjeri laganih zadataka iz kombinatorike:

1. Od devet sukladnih pravokutnika čije dužina i širina su prirodni brojevi sastavljena je pravokutna ploča dimenzija 20×9 . Kojih sve dimenzija mogu biti polazni pravokutnici? *(školsko 2016, 1.r.)*

Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: razlikovanje slučajeve, konstrukcija primjera, korištenje parnosti kao invarijante
2. U kutiji se nalazi po k loptica s oznakom k za sve $k = 1, 2, \dots, 50$. Iz kutije se izvlače loptice bez gledanja. Koliko je najmanje loptica potrebno izvući da bismo bili sigurni da je izvučeno barem 10 loptica s istom oznakom? *(školsko 2014, 1.r.)*

Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: primjena Dirichletova principa, konstrukcija primjera

3. Jednog jutra, 11 prijatelja odlučilo je obojati veliku ogradu. Bojanje je počelo u 9 sati i završilo u 17 sati. Svatko je započeo na puni sat i radio točno dva sata. Možemo li biti sigurni da je u nekom periodu istovremeno radilo barem četvero prijatelja? (školsko 2016, 2.r.)

Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: čitanje s razumijevanjem, grafičko reprezentiranje vremena, primjena Dirichletova principa

4. Neka je A broj šesteroznamenkastih brojeva čiji je umnožak znamenki 105, a B broj šesteroznamenkastih brojeva čiji je umnožak znamenki 147. Odredi omjer $A : B$. (školsko 2014, 2.r.)

Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: primjena osnovnih principa prebrojavanja (princip bijekcije ili princip uzastopnog prebrojavanja)

5. Šahovska ploča je ploča s 8 redaka i 8 stupaca čija su polja obojana naizmjenice crno-bijelo tako da je polje u prvom retku i prvom stupcu obojano crno. U svako polje šahovske ploče upisan je po jedan cijeli broj. Poznato je da je zbroj svih brojeva na bijelim poljima jednak 26, a zbroj svih brojeva u neparnim stupcima jednak 43.

Ako promijenimo predznake svih brojeva na bijelim poljima, koliki će biti zbroj svih brojeva u neparnim redcima nakon te promjene? (školsko 2014, 3.r.)

Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: zapisivanje uvjeta zadanih riječima na algebarski način, povezivanje

6. Gornja desna četvrtina šahovske ploče (dimenzija 8×8) je prekrivena papirom. Koliko najviše topova možemo postaviti na

preostali dio šahovske ploče tako da se međusobno ne napadaju? Na koliko načina se to može napraviti? (školsko 2013, 4.r.)

Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: konstrukcija primjera, korištenje osnovnih principa prebrojavanja

7. Na ploči dimenzija 5×7 kojoj su sva polja bijela, potrebno je obojati točno 17 polja crnom bojom tako da nastali raspored crnih i bijelih polja na ploči bude centralno-simetričan, tj. da se ne mijenja rotacijom za 180° oko središta ploče. Na koliko je načina to moguće napraviti? (školsko 2014, 4.r.)

Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: osnovni principi prebrojavanja, binomni koeficijent, korištenje simetrije

8. U kutiji se nalazi jedna crvena i pet bijelih kuglica označenih brojevima 1, 2, 3, 4, 5. Ne gledajući, Domagoj izvlači jednu po jednu kuglicu sve dok ne izvuče crvenu kuglicu, nakon čega prekida izvlačenje. Izvučene kuglice se ne vraćaju u kutiju. Kolika je vjerojatnost da je zbroj brojeva na izvučenim bijelim kuglicama barem 10? (školsko 2015, 4.r.)

Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: računanje uvjetne vjerojatnosti, razlikovanje slučajeva

Geometrija

Geometrijsko područje obuhvaća teme opisane u NOK-u u domenama oblik i prostor te mjerenje. Trenutni školski kurikulum sadrži mnoge teme iz geometrije, ali nažalost rezultati natežanja pokazuju da na redovnoj nastavi učenici savladaju definicije geometrijskih pojmova i osnovna svojstva (npr. formule za površinu),

ali ne i vještinu rješavanja geometrijskih zadataka u kojima je ta svojstva potrebno samostalno prepoznati i povezati. Iako je broj geometrijskih pojmova i teorema koji se obrade na redovnoj nastavi poprilično velik, oni se vrlo uspješno usvajaju. No, to nije dovoljno za uspješno rješavanje zadataka. Zato je pregled koji donosimo sažet, a veći naglasak želimo dati napomenama za rješavanje problema.

Najveći broj zadataka iz geometrije možemo klasificirati kao zadatke iz klasične planimetrije. U manjoj mjeri, i to isključivo na nižim razinama natjecanja u 3. i 4. razredu, pojavljuju se zadaci iz stereometrije i geometrije krivulja drugog reda.

Pristupe u rješavanju dijelimo na sintetičke i analitičke. Za uspješno rješavanje zadataka korisno je poznavati oba pristupa, osobito s osjećajem koji od pristupa je pogodniji za koji tip zadatka. Zbog toga preporučujemo da se i na dodatnoj nastavi posebna pažnja posveti usporedbi različitih pristupa rješavanju pojedinog zadatka.

Sintetički pristup počiva na korištenju geometrijskog zora i logičkoj dedukciji, te je idealan je za uvođenja pojma dokaza u matematičkom obrazovanju. Učenici svoje prve dokaze naprave upravo kroz rješavanje geometrijskih zadataka i kroz takve zadatke tijekom cijele srednje škole poboljšavaju svoje sposobnosti rješavanja problema i dokazivanja. Zbog toga važnost geometrije u obrazovanju ne jenjava iako planimetrija već dugo nije u fokusu znanstvenika-matematičara.

S druge strane, analitički pristup je karakteriziran korištenjem formula, trigonometrije, vektora i koordinatne metode. Važno je naglasiti da je pogrešno analitički pristup prikazivati kao korištenje prečaca i formula, već ga treba podučavati s naglaskom na razumijevanju veza iz-

među geometrije i algebre čime jačamo sposobnost učenika za povezivanje, interdisciplinarno razmišljanje i matematičko modeliranje.

Obrazovni sustav s godinama sve više naginje analitičkom pristupu (npr. geometrijska svojstva krivulja drugog reda se uopće ne obrađuju, a ne obrađuju se ni složeniji planimetrijski zadaci), dok su natjecanja iz matematike na svim razinama zadržala veliki naglasak na sintetičkom pristupu. Kao posljedicu možemo uočiti da postoji velik broj natjecatelja koji izbjegavaju geometriju na natjecanjima.

Iskustva pokazuju da se geometrijski zor može uvježbati i da je geometrija (zbog činjenice da su ljudi vizualna bića) područje u kojem je najlakše napredovati (na svim razinama, od početničke do olimpijske). Još je neobičnije koliko učenika tih činjenica nije svjestan. Zbog toga smatramo da mentor može učiniti mnogo u poboljšanju rezultata svojih učenika za sintetičko rješavanje geometrijskih zadataka. Najvažniji ishodi dodatne nastave vezani uz geometriju su vezani uz vještine koje su najmanje zastupljene u redovnoj nastavi i koje su učenicima najteže. To su crtanje dodatnih elemenata sa svrhom, vještina lovljenja kutova (eng. *angle chasing*) i zapisivanje dokaza.

Osnovne teme iz geometrije:

- Pitagorin i Euklidov teorem
- sukladnost i sličnost - uočavanje i korištenje u složenim dokazima
- paralelnost - korištenje transverzale, zbroj kutova u trokutu, dijagonale paralelograma se raspolavljaju
- karakteristične točke trokuta - dokazivanje konkurentnosti pravaca, teorem o simetrali kuta, srednjica trokuta, težište dijeli težišnicu u omjeru 2:1

- površine - rastavljanja likova i osnovne formule za površinu trokuta, metoda površine u dokazima iz planimetrije
- krug i kružnica (1.r. od državne razine, ostali razredi od školske razine) -
tetivni četverokut: obodni i središnji kut, Talesov teorem, potencija točke obzirom na kružnicu
tangencijalni četverokut: jednakost duljina odsječaka tangenti
- primjena trigonometrije - teorem o sinusima i teorem o kosinusu (3.r.)
- stereometrija (3.r.) - računanje obujma geometrijskih tijela, crtanje presjeka tijela ravninom
- vektori (3.r.)
- analitička geometrija - koordinatna metoda (od 1.r.), krivulje drugog reda (na natjecanjima od 4.r.)

Dodatni teoremi koji mogu poslužiti kao tema na dodatnoj nastavi i čije korištenje može pomoći u rješavanju natjecateljskih zadataka, ali nije nužno na školskoj, županijskoj ili državnoj razini

- Ptolomejev teorem, teorem o kutu tetive i tangente, Stewartov teorem, Cevin teorem, Menelajev teorem itd.

Dodatna literatura iz geometrije:

- Anđelko Marić, *Planimetrija*
- Evan Chen, *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiad*
- Yufei Zhao (notes), *Lemmas in Euclidean Geometry*

- Arseniy Akopyan, *Geometry in Figures*
- Vladimir Prasolov, *Plane Geometry*
- Sotirios E. Louridas, Michael Th. Rassias, *Problem-Solving and Selected Topics in Euclidean Geometry*
- Mea Bombardelli, Dijana Ilišević, *Elementarna geometrija*, skripta za istoimeni kolegij na PMF-MO

Primjeri laganih geometrijskih zadataka:

1. Dan je kvadrat $ABCD$ stranice duljine a . Vrhovi A i C središta su dviju kružnica koje prolaze točkama B i D . Ako su sjecišta tih kružnica s dijagonalom \overline{AC} točke M i N , odredi površinu četverokuta $BMDN$. (školsko 2016, 1.r.)

Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: rastavljanje površina, računanje površine četverokuta s okomitim dijagonalama (tj. pravokutnog trokuta), korištenje simetrije

2. Dan je pravilni 2013-erokut $A_1A_2 \dots A_{2013}$. Neka je S sjecište dužina $\overline{A_1A_4}$ i $\overline{A_3A_5}$. Odredi mjeru kuta $\sphericalangle A_3SA_4$. (školsko 2013, 1.r.)

Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: unutarjni kutovi mnogokuta, zbroj kutova u trokutu

3. Neka je O središte opisane kružnice šiljastokutnog trokuta ABC , te neka je N nožište visine iz vrha A . Dokaži da je $\sphericalangle BAN = \sphericalangle CAO$. (školsko 2015, 2.r.)

Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: karakteristične točke trokuta, obodni i središnji kut

4. Točke A, B, C, D, E leže tim redom na kružnici čiji je promjer \overline{AE} . Odredi $\sphericalangle ABC + \sphericalangle CDE$. (školsko 2016, 2.r.)

Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: uočavanje tetivnih četverokuta, Talesov teorem

5. Neka je ABC pravokutan trokut i \overline{CN} njegova visina. Ako je $|AC| = |BN| = 1$, kolika je duljina hipotenuze \overline{AB} ? (školsko 2013, 1.r.)

Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: Euklidov i Pitagorin teorem, uvođenje vlastitih oznaka, rješavanje kvadratne jednadžbe

6. Neka je $ABCD$ tetraedar u kojem je $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD = \sphericalangle DAB = 90^\circ$, $|AD| = 2\sqrt{2}$ te $|AB| = |AC| = 3$. Odredi polumjer sfere upisane tom tetraedru. (školsko 2015, 3.r.)

Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: formule za obujam sfere i tetraedra, crtanje poprečnih presjeka, karakteristične točke trokuta

7. U trokutu ABC vrijedi $\sphericalangle ABC = 2\sphericalangle BAC$. Dokaži da je $|AC| < 2|BC|$. (školsko 2014, 3.r.)

Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: primjena trigonometrije ili nejednakost trokuta

8. Neka je $ABCDEF$ šesterokut upisan u kružnicu. Dužina \overline{BE} siječe dužinu \overline{AC} u točki G , a dužinu \overline{DF} u točki H . Ako je $|CG| = |HG| = 3$, $|BG| = |HD| = 2$ i $|HF| = 5$, odredi $|AC|$. (školsko 2016, 4.r.)

Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: potencija točke obzirom na kružnicu (ili obodni kutovi i sličnost)

Teorija brojeva

Teorija brojeva je područje koje pokriva teme vezane uz prirodne brojeve i djeljivost obuhvaćene domenom brojevi u NOK-u. Ovo klasično područje je i danas vrlo živo područje istraživanja i obiluje otvorenim problemima. Samo mala modifikacija može jednostavno pitanje pretvoriti u dosad nerješivi problem i obratno.

Svi osnovni pojmovi potrebni za rješavanje zadataka na nižim razinama natjecanja obrade na redovnoj nastavi, a teme iz teorije brojeve su u Hrvatskoj tradicionalno sastavni dio dodatne nastave gotovo svakog mentora. S druge strane, opseg gradiva posvećen teoriji brojeva je jako malen i rezultati natjecanja pokazuju da učenici bez dodatne pripreme nemaju dovoljno iskustva za uspješno rješavanje ni najjednostavnijih zadataka. Uz nedostatak tema iz teorije brojeve u redovnom programu, jedan od uzroka za slabije rezultate na zadacima iz ovog područja mogao bi biti u prespecifičnom odabiru tema i metoda pri kreiranju programa dodatne nastave.

Mentorima bismo preporučili da učenike usmjere na savladavanje osnovnih principa djeljivosti i njihove primjene kroz velik broj zadataka, te podsjetiti da za niže razine natjecanja nije potrebno obrađivati veći broj naprednih tema (poput Eulerovog teorema). Osnovne teme treba pripremiti već za školsko natjecanje i to od 1.razreda.

Najčešći tip zadataka iz teorije brojeva su diofantske jednadžbe, no treba primijetiti da je ta tema vrlo široka i da ju ne navodimo u pregledu iz teorije brojeva jer smatramo da je potrebno osvjestiti da u rješavanju koristimo razne metode. Diofantske jednadžbe razlikujemo prema metodama rješavanja pri čemu te metode koristimo i u drugim zadacima. Kao u kombinatorici, te metode možemo podijeliti na

one kojima dobivamo rješenja (faktorizacija, metoda kvocijenta) i one kojima pokazujemo da nema rješenja (promatranje ostataka).

Nekoliko vrlo elementarnih aspekata bismo posebno izdvojili. Jedna od najvažnijih vještina u rješavanju laganih zadataka iz teorije brojeva je korištenje vlastitih oznaka na način koji omogućava redukciju problema na jednostavniji. Primjeri su uvođenje mjere (tj. zapisivanje prirodnih brojeva n i m u obliku $n = d \cdot u$ i $m = d \cdot v$ pri čemu je $d = M(n, m)$ i $M(u, v) = 1$) ili zapisivanje prirodnog broja n u obliku $n = 2^k \cdot m$, pri čemu je m neparan broj.

Drugi aspekt koji bismo željeli istaknuti je korištenje osnovnog teorema aritmetike koji kaže da svaki prirodni broj možemo na jedinstven način (do na poredak faktora) prikazati kao produkt prostih brojeva. Ta netrivialna činjenica je učenicima poznata od osnovne škole. Ističemo ju jer najčešći primjer tvrdnji koje učenici prepoznaju kao očite i nedovoljno ili neispravno argumentiraju su upravo one koje u svojem dokazu koriste taj teorem. Takva je, na primjer, tvrdnja: ako su a i b prirodni brojevi takvi da je $a^2 = b^3$, onda postoje prirodni brojevi c i d takvi da je $a = c^3$ i $b = d^2$. Mnogi učenici tvrde da je ta činjenica očita, a mali broj njih osjeća da ju treba dokazati i još manje ih to zna učiniti.

Osnovne teme iz teorije brojeve:

- zadaci sa znamenkama, kriterij djeljivosti za 3 i 9, korištenje dekadskog zapisa
- djeljivost – djelitelji (broj, sparivanje), mjera, rastav na proste faktore
- Euklidov algoritam i linearne diofantske jednadžbe

- metoda faktorizacije (nelinearne diofantske jednadžbe i drugi zadaci)
- metoda kvocijenta
- periodičnost ostataka potencija modulo n , sustavi ostataka kvadrata/kubova modulo n (nelinearne diofantske jednadžbe i drugi zadaci)

Dodatna literatura iz teorije brojeva:

- Peter Vandendriessche, Hoojoo Lee, *Problems in Elementary Number Theory*
- Michael Th. Rassias, *Problem-Solving and Selected Topics in Number Theory*
- Naoki Sato, *Number Theory*
- Dolinka, *Elementarna teorija brojeva*
- Andrej Dujella, *Uvod u teoriju brojeva*, skripta za istoimeni kolegij na PMF-MO

Primjeri laganih zadataka:

1. Odredi prirodni broj n takav da mu je zbroj najmanja dva djelitelja 6, a zbroj najveća dva djelitelja 1122.
(školsko 2015, 1.r.)

Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: ideja sparivanje djelitelja, zapisivanje uvjeta zadanog riječima formulom

2. Koji broj ima više djelitelja u skupu prirodnih brojeva, 2013^2 ili 20480 ?
(školsko 2013, 2.r.)

Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: prebrojavanje djelitelja prirodnog broja koristeći rastav na proste faktore

3. Dokaži da zbroj svih troznamenkastih brojeva čiji se dekadski zapis sastoji od tri različite znamenke različite od nula ima barem tri različita prosta djelitelja.
(školsko 2013, 2.r.)

Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: čitanje s razumijevanjem, dekadski zapis prirodnog broja, korištenje vlastitih oznaka, dokaz djeljivosti na temelju faktorizacije

4. Koliko uređenih parova prirodnih brojeva (m, n) zadovoljava jednadžbu $m^2 - n^2 = 2^{2013}$?
(školsko 2013, 3.r.)

Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: metoda faktorizacije, razlikovanje slučajeva, prebrojavanje djelitelja

5. Ako su p i $p^2 + 8$ prosti brojevi, dokaži da je i broj $p^3 + 4$ prost. (školsko 2014, 3.r.)

Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: razlikovanje slučajeva, ostaci kvadrata pri dijeljenju brojem 3

6. Odredi najveći prirodni broj n takav da

$$n + 5 \mid n^4 + 1395.$$

(školsko 2015, 3.r.)

Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: metoda kvocijenta, manipuliranje algebarskim izrazima (formula za razliku kvadrata)

7. Za prirodni broj n označimo s R_n broj čiji se dekadski zapis sastoji od n znamenki
1. Dokaži tvrdnju: ako je R_n prost broj, onda je i n prost broj. (školsko 2015, 4.r.)

Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: dokaz korištenjem obrata po kontrapoziciji, dokaz djeljivosti na temelju faktorizacije

8. Tamara je na ploču napisala paran prirodan broj. Nakon toga je, jednog za drugim, napisala još dvanaest brojeva tako da je svaki broj za 5 veći od kvadrata prethodno napisanog broja. Odredi kojom znamenkom može završiti posljednji napisani broj. (školsko 2014, 4.r.)

Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: razlikovanje slučajeva, periodičnost ostataka kvadrata pri dijeljenju brojem 10

Interdisciplinarne teme

Natjecateljski zadaci vrlo često zahtijevaju znanja iz raznih područja. Dapače, jedna od najvažnijih vještina koja se na natjecanjima promiče je povezivanje različitih dijelova matematike i primjena matematičkih alata na razne nestandardne probleme. Na školskoj razini ovakvi zadaci ne zahtijevaju poznavanje posebnih metoda, već povezivanje osnovnih činjenica i vještina.

Neke interdisciplinarne teme:

- kombinatorna geometrija
- primjena trigonometrije u geometriji
- analitička geometrija
- kombinatorna teorija brojeva
- geometrijska vjerojatnost

Primjeri laganih zadataka mješovitog tipa:

1. U ravnini je nacrtano sto kružnica s istim središtem polumjera $1, 2, \dots, 100$. Najmanji krug obojan je crvenom bojom, a svaki od 99 kružnih vijenaca omeđenih dvjema kružnicama crvenom ili zelenom

bojom tako da su susjedna područja različiti boja.

Odredi ukupnu površinu zeleno obojanih područja. (školsko 2015, 1.r.)

Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: formula za površinu kruga (odn. kružnog vijenca), korištenje formule za razliku kvadrata, računanje zbroja prvih 100 prirodnih brojeva

2. U koordinatnom sustavu označene su sve cjelobrojne točke (x, y) pri čemu je $1 \leq x \leq 200$ i $1 \leq y \leq 100$, ukupno 20000 točaka. Koliko ima dužina duljine $\sqrt{5}$ čiji su krajevi označene točke?

(školsko 2013, 2.r.)

Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: računanje udaljenosti točaka u koordinatnom sustavu, reprezentiranje pravokutnika dijagonalom, prebrojavanje pravokutnika u cjelobrojnoj mreži, razlikovanje slučajeva

3. Neka je ABC trokut s težištem T u kojem su točke D i E redom polovišta stranica \overline{BC} i \overline{CA} . Ako je trokut ATE jednakos-traničan, odredi kosinus kuta $\sphericalangle DAB$.

(školsko 2016, 3.r.)

Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: težište dijeli težišnicu u omjeru $2 : 1$, primjena teorema o kosinusu (ili o sinusima)

4. Odredi najmanji prirodni broj n takav da u svakom skupu koji se sastoji od n cijelih brojeva postoje tri međusobno različita elementa a, b i c takva da je $ab + bc + ca$ djeljivo sa 3. (školsko 2015, 3.r.)

Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: određivanje optimalne vrijednosti, dokaz za gornju ogradu na temelju

razlikovanje slučajeva u ovisnosti o ostacima pri dijeljenju brojem 3, konstrukcija primjera

5. Iz intervala $[0, 1]$ na slučajan način biraju se brojevi a i b . Kolika je vjerojatnost da jednadžba $ax^2 + bx + a = 0$ nema realnih rješenja? (školsko 2015, 3.r.)

Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: korištenje diskriminante, geometrijska vjerojatnost, računanje površine trokuta

6. Za realni broj a , neka je \mathcal{P}_a parabola s jednadžbom $y = x^2 + ax + (2014 - a)$.

Dokaži da sve parabole \mathcal{P}_a prolaze istom točkom. (školsko 2014, 4.r.)

Znanja i vještine potrebni za rješavanje zadatka: povezivanje geometrijske i algebarske interpretacije krivulje drugog reda