



NATJECANJA I NASTAVA MATEMATIKE KROZ PRIZMU KOMPETENCIJA ZA 21. STOLJEĆE

DR. SC. MATIJA BAŠIĆ, PMF-MO, SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

7. KONGRES NASTAVNIKA MATEMATIKE RH

ZAGREB, 30. LIPNJA 2016.

ŠTO SU “KOMPETENCIJE ZA 21. STOLJEĆE”?

- znanja, vještine i sposobnosti, te stavova
- potrebe modernog društva, zanimanja budućnosti
- EU inicijativa: Lisabon Agenda (2000-2010) i Europe 2020
 - održivi ekonomski razvoj, društvo temeljeno na znanju, promicanje aktivnog građanstva. ostvarivanje cjeloživotnog obrazovanja i mobilnosti, podrška državama EU u razvoju vlastitih obrazovnih sustava i poboljšavanju kvalitete i efikasnosti, poticanje kreativnosti, inovativnosti i poduzetništva
 - **matematička kompetencija** i osnovne kompetencije u prirodoslovlju i tehnologiji – jedna od osam ključnih kompetencija Europskog referentnog okvira za cjeloživotno učenje

GENERIČKE KOMPETENCIJE



POTEŠKOĆE, NEDOSTACI I POTREBE U (MATEMATIČKOM) OBRAZOVANJU

- ispodprosječni rezultati na međunarodnim ispitima (npr. PISA=
- rascjepkano znanje, nemogućnost povezivanja
- pasivnost
- nemogućnost prepoznavanja relevantnosti i konteksta u kojem važna matematika
- veće vrednovanje potencijala/talenta nego rada/postignuća
- skroman ugled nastavničke profesije
- nedovoljno profilirana gospodarska politika i neartikulirane potrebe tržišta rada

TEORIJE UČENJA I PODUČAVANJA MATEMATIKE

- hrvatska inicijativa - projekt MERIA:

Mathematics Education – Relevant, Interesting and Applicable

- Realistic Mathematics Education (RME)

- H. Freudenthal, Nizozemska
- matematika kao ljudska aktivnost; učenik otkriva matematiku
- kontekst u kojem učenik može situaciju prepoznati kao stvarnu, relevantnu
- naglasak na razumijevanju, umjesto na računskim algoritmima

- Theory of Didactical Situations (TDS)

- G. Brousseau, Francuska
- nastavnik samo dizajnira probleme i situacije koje potiču učenikovo očekivano učenje
- učenik djeluje kao matematičar; autonomno djelovanje je preduvjet za učenje

NATJECANJA IZ MATEMATIKE I KOMPETENCIJE

Mane klasičnog pristupa podučavanja

(nastavnik prezentira rješenja zadataka kao ilustraciju određene metode):

- nedostatak vremena da se "pokriju sve metode"
- učenici su pasivni i ne usvajaju način razmišljanja
- nedostaje izgradnja samopouzdanja i samostalnosti učenika
- učenik ne prepoznaje ključne elemente i nema povratnu informaciju o svom znanju kako bi mogao izgraditi realistična očekivanja

NATJECANJA IZ MATEMATIKE I KOMPETENCIJE

Aktivirajući pristup:

- poticanje učenika na samostalan rad
- učenik rješava uz nastavnikove minimalne upute
- pokazivanje strategija rješavanja umjesto metoda
- učenik samostalno pronalazi i grupira zadatke
- nastavnik s učenikom rješava i zadatke koji nije vidio prije (razvoj istraživačkog pristupa i prikaz kako se matematika stvara)
- pokazati emocije (prenošenje interesa)
- **postizanje aha-efekta**

RJEŠAVANJE PROBLEMSKIH ZADATAKA

(Brookhart, 2010) viši oblici mišljenja su

- transfer (upotreba) - mogućnost prisjećanja i primjene u stvarnim situacijama
- kritičko razmišljanje – procjena kredibiliteta izvora informacija, identifikacija hipoteza, razumijevanje svrhe pisanog teksta, kritika efikasnosti strategija
- rješavanje problema – situacije u kojima želimo postići specifični cilj, ali ne vidimo put ili rješenje kako cilj postići

Bransford, Stein (1984) – IDEAL:

Identification, Definition, Exploring alternatives, Applying, Looking back

Metode rješavanja problema:

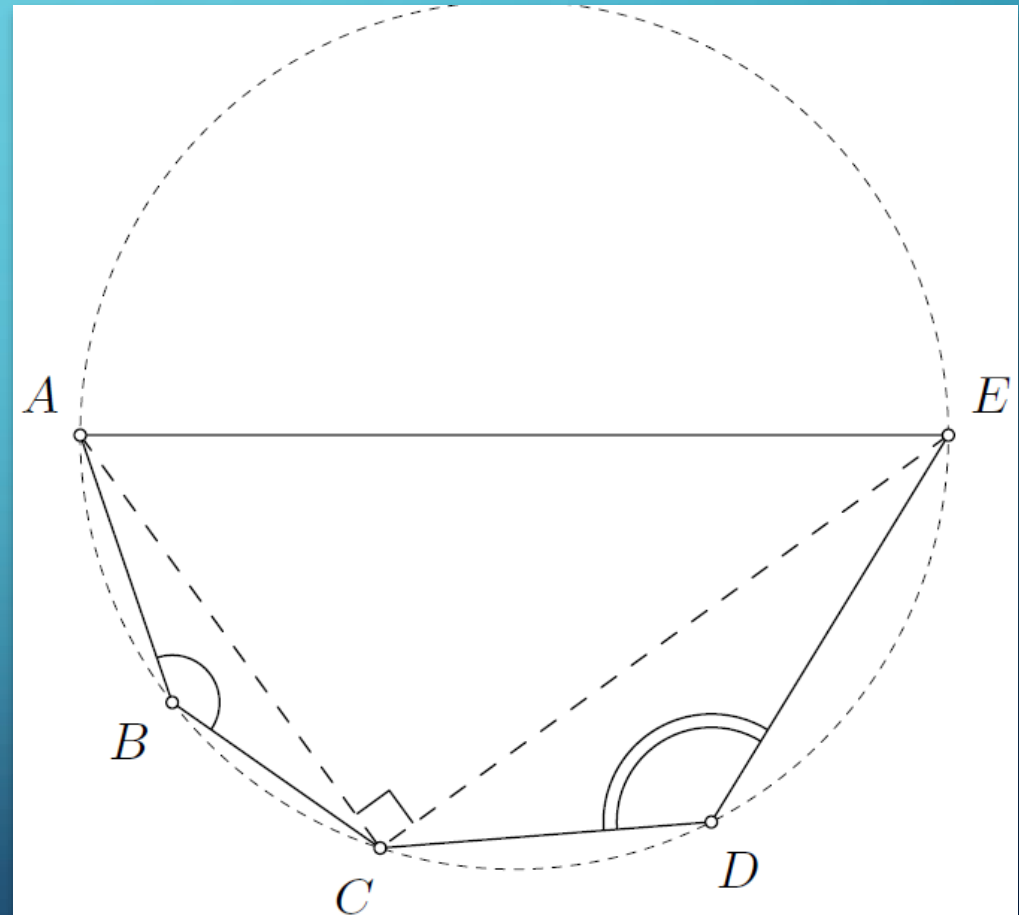
- prisjećanje informacija i metoda, kritička evaluacija ideja, formuliranje kreativnih alternativa, efikasna komunikacija

PRIMJER SA ŠKOLSKOG NATJECANJA 2016.

Od devet sukladnih pravokutnika čije dužina i širina su prirodni brojevi sastavljena je pravokutna ploča dimenzija 20×9 . Kojih sve dimenzija mogu biti polazni pravokutnici?

PRIMJER SA ŠKOLSKOG NATJECANJA 2016.

Točke A, B, C, D, E leže tim redom na kružnici čiji je promjer AE . Odredi zbroj kutova ABC i CDE .



ISHODI UČENJA U (DODATNOJ) NASTAVI MATEMATIKE

Učenik

- samostalno ispituje posebne slučajeve
- otkriva uzorak na temelju vlastite logike
- postavlja hipotezu
- dokazuje ili opovrgava hipotezu
- konstruira primjere i kontraprimjere za svoje slutnje
- uvodi vlastite oznake i pomoćne elemente sa svrhom
- ima samopouzdanje da će riješiti zadatak koji nije prije vidio
- uspješno artikulira i prenosi svoje misli drugima (pismeno i usmeno)
- samostalno uči i traži materijale vezane uz određenu temu
- svjesno koristi strategije
- kritički pristupa svom radu
- ima realistična očekivanja

BLOOMOVA TAKSONOMIJA



DODATNA NASTAVA

- **SVRHA:** pri uvođenju oznaka i dodatnih elemenata rješenje objasniti svrhu – je li svrha nama poznata? jesmo li samostalno došli do onoga o čemu pričamo?
- **PLAN:** planirati vrijeme za pitanja, poticati raspravu – planirati znači pripremiti se za moguće smjerove u kojima rasprava može otići, potrebna fleksibilnost
- **JASNOĆA:** jasno uvesti nove koncepte (pojmove, metode), naglasak na malom broju ključnih osnovnih koncepata, ne poticati preskakanje
- **PODRŠKA:** pronaći ravnotežu u odnosu, poticanje u inicijalnim fazama, strpljivost, pažljivo prepuštanje odgovornosti učeniku da preuzme inicijativu, poticanje samostalnosti, ohrabrivanje
- **METAKOGNICIJA:** osvijestiti strategije i više oblike razmišljanja koje koristimo, mijenjati kontekst, povezivati sa primjenama

KAKO PRIPREMITI DODATNU NASTAVU?

- zadaci sa starih natjecanja
- materijali s priprema za međunarodna natjecanja (natjecanja.math.hr)
- knjige sa zadacima iz jednog područja: npr. Planimetrija (Marić), Kombinatorika (Cvitković), 102 Combinatorial Problems (Andreescu), Functional Equations (Venkatachala), $A > B$ (Kedlaya), Geometry Unbouded (Kedlaya), materijali sa stranice Yufei Zhaoa,...
- knjige za problem solving:
 - A. Engel, Problem Solving Strategies
 - P. Zeitz, Art and Craft of Problem Solving

KOJE TEME OBRADITI NA DODATNOJ NASTAVI?

Algebra:

- složeniji zadaci iz gradiva: algebarski izrazi i jednačbe, kompleksni brojevi, kvadratna jednačba i polinomi, eksponencijalna i logaritamska funkcija, trigonometrija, nizovi
- nejednakosti (županijsko i državno)
- funkcijske jednačbe (4.r.)

ishodi: algebarska manipulacija i dokazivanje nejednakosti

Kombinatorika:

- logički zadaci – nema metode
- Dirichletov princip (osnovna škola)
- prebrojavanje – osnovni principi (1.r. školsko), dvostruko prebrojavanje (žup. i drž.)
- invarijante
- odredi najveći/najmanji...
- indukcija (3. i 4. r.)

ishodi: metode dokazivanja

KOJE TEME OBRADITI NA DODATNOJ NASTAVI?

Geometrija:

- sukladnost i sličnost
- karakteristične točke trokuta
- površine
- tetivni četverokut (1.r. državno, ostali razredi od školske razine)
- stereometrija, vektori, analitička geometrija

ishodi: dokazivanje, svrhovito crtanje dodatnih elemenata, angle chasing

Teorija brojeva:

- zadaci sa znamenkama, zapis u bazi, kriterij djeljivosti za 3 i 9 (OŠ)
- djeljivost – djelitelji (broj, sparivanje), mjera, rastav na proste faktore
- diofantske jednačbe
 - faktorizacija
 - metoda kvocijenta
 - periodičnost ostataka mod n

ishodi: korištenje oznaka, primjena djeljivosti, rješavanje jednačbi

HVALA NA PAŽNJI!

- kontakt: mbasic@math.hr
- web.math.pmf.unizg.hr/~mbasic/

The background is a solid teal color with a subtle gradient. In the four corners, there are decorative white line-art elements resembling circuit traces or network diagrams, with small circles at the end of the lines.

RADIONICA – VREDNOVANJE RJEŠENJA PROBLEMSKIH ZADATAKA

SMJERNICE ZA IZRADU BODOVNE SCHEME

- Idealna situacija: prvo vidjeti sve testove, a onda izraditi kriterije bodovanja
- Samostalno riješiti zadatak
- Prikupiti što više različitih rješenja
- Odrediti ključne korake – lakše napraviti shemu s manjim rasponom bodova
- Revidirati i usporediti bodovanja različitih rješenja
- Pojasniti specifične situacije napomenama

ZADATAK IZ GEOMETRIJE

- U trokutu ABC simetrala kuta ACB siječe stranicu AB u točki D. Ako je $|CB| = |CD|$, $|AD| = 4$ i $|DB| = 3$, odredi $|AC|$.

ZADATAK IZ GEOMETRIJE

- koje dodatne elemente možemo dočrtati? s kojim ciljem?
- koje kutove možemo izračunati? pojavljuju li se tetivni četverokuti?
- moramo li iskoristiti teorem o simetrali kuta?
- je li trigonometrijsko rješenje jednostavnije ili složenije od planimetrijskog?

ZADATAK IZ KOMBINATORIKE

- Marko ima $2n$ kartica, po dvije kartice sa svakim od brojeva $1, 2, \dots, n$. Kada ih je promiješao i složio jednu do druge u niz, primijetio je da se za svaki k iz skupa $\{1, 2, \dots, n\}$ između dviju kartica s brojem k nalazi točno k drugih kartica. Dokaži da je broj $n^2 + n$ djeljiv s 4.

ZADATAK IZ KOMBINATORIKE

- za koje n možemo konstruirati primjer?
- govore li nam mali slučajevi nešto o strukturi?
- kako interpretirati broj n^2+n ? kako iskoristiti uvjet zadatka?
- koji pristup se čini prirodniji?
- koji je ključani korak u rješenju?

ZADATAK IZ ALGEBRE

- Neka su x i y realni brojevi takvi da vrijedi

$$\sin x + \sin y = 1/3.$$

Dokaži da vrijedi $\sin(3x) + \sin(3y) \geq 26/27$.

ZADATAK IZ ALGEBRE

- koliko je važna formula za sinus trostrukog kuta?
- očekujemo li da učenik zna tu formulu? očekujemo li da ju može samostalno izvesti?
- koji je ključni korak u rješenju?
- očekujemo li da učenik koristi AG nejednakost?

ZADATAK IZ TEORIJE BROJEVA

- Za prirodne brojeve a , b i prost broj p vrijedi $a^2 + p^2 = b^2$. Dokaži da je $2(b+p)$ kvadrat nekog prirodnog broja.

ZADATAK IZ TEORIJE BROJEVA

- postoji li „najprirodniji način” za rješavanje ovog zadatka?
- mora li učenik znati za Pitagorine trojke?
- što čini zadatak teškim?

HVALA NA PAŽNJI!

- kontakt: mbasic@math.hr
- web.math.pmf.unizg.hr/~mbasic/