Mainstream i marginalne ideje iz kombinatorike i kombinatorne geometrije

Matija Bašić

30. svibnja 2008.

0.1. $2n$ bijelih i $2n$ crnih kuglica poredano je u niz u nekom poretku. Dokažite da je moguće pronaći $2n$ uzastopnih kuglica među kojima je točno n bijelih.

0.2. Pokaži da se može pronaći 1000 uzastopnih prirodnih brojeva među kojima je točno 5 prostih.

0.3. Dano je 8 kockica čije strane su obojane tako da je točno 24 strana crveno, a 24 plavo. Dokažite da je bez obzira kako kockice bile obojane moguće kockice složiti tako da dobivena kocka $2 \times 2 \times 2$ bude u potpunosti crvena izvana.

0.4. (Teorem o palačinkama) Neka su A i B dva mnogokuta ravnini. Dokažite da postoji pravac koji istodobno raspolavlja i A i B. Možete li generalizirati ovu tvrdnju?

0.5. U ravnini je dano $2n$ točaka. Dokažite da postoji pravac takav da je sa svake strane tog pravca točno n danih točaka te da je zbroj udaljenosti od pravca točaka s jedne strane pravca jednak zbroju udaljenosti od pravca za točke s druge strane.

0.6. Dokaži da među svakih 5 točaka u ravnini možemo naći 4 koje su vrhovi konveksnog četverokuta.

0.7. U ravnini je dano $3n$ točaka tako da nikoje tri nisu kolinearne. Dokaži da su te točke vrhovi n međusobno disjunktnih trokuta.

0.8. U ravnini je dan konačan broj crnih i bijelih točaka tako da za svake 4 o tih točaka postoji pravac kojem su bijele točke s jedne strane, a crne s druge. Dokažite da postoji pravac tako da su sve bijele točke s jedne strane tog pravca, a sve crne s druge.

0.9. Dane su $2n + 3$ točke u ravnini tako da se nikoje tri ne nalaze na istom pravcu i nikoje četiri na istoj kružnici. Dokaži da postoji kružnica koja prolazi kroz neke tri od zadanih točaka i unutar koje se nalazi točno n zadanih točaka.

0.10. Neka je n prirodan broj veći od 1. U ravnini je dano $2n$ točaka tako da nikoje tri nisu kolinearne te je n točaka obojana plavo, a n crveno. Pravac zovemo *balansirajućim* ako prolazi kroz točno jednu plavu i jednu crvenu točku i u poluravnini određenoj tim pravcem je jednak broj plavih i crvenih točaka. Pokaži da postoje barem dva balansirajuća pravca.

0.11. (IMO 2006/6) Svakoj stranici b konveksnog mnogokuta $\mathcal{P}$ pridružena je maksimalna površina trokuta kojemu je b jedna od stranica i koji je sadržan u $\mathcal{P}$. Dokažite da je zbroj svih površina pridruženih stranicama mnogokuta $\mathcal{P}$ ve?i ili jednak od dvostruke površine mnogokuta $\mathcal{P}$.

0.12. U ravnini je dano n točaka pri čemu je d najmanja udaljenost neke dvije od tih točaka. Dokažite da možemo ukloniti barem $\frac{3n}{4}$ točaka tako da nikoje dvije od preostalih točaka ne budu udaljene za d.

0.13. Svaka unutarnja točka jednakostraničnog trokuta radijusa 1 je pokrivena jednim od 6 krugova polumjera r. Dokažite da je $r \geq \frac{\sqrt{3}}{10}$.

0.14. U ravnini je dano n točaka. Dokažite da postoje neke tri među njima koje čine kut koji nije veći od $\frac{\pi}{n}$.

0.15. Unutar konveksnog n-terokuta dano je $2 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ točaka. Dokažite da možemo odabrati $2k$ vrhova n-terokuta tako da mnogokut kojem su one vrhovi sadrži danih k točaka.

0.16. U ravnini je dano n pravaca takvih da nikoja dva nisu paralelna i nikoja tri se ne sijeku u istoj točki. Dokažite da je moguće svakom području ravnine određenom danim pravcima pridružiti cijeli broj različit od 0, a po apsolutnoj vrijednosti najviše n tako da je suma svih pridruženih brojeva na svakoj strani proizvoljnog zadanog pravca jednaka 0.

0.17. U nekoj državi n avionskih kompanija povezuje $2^n + 1$ gradova i to tako da svaka dva grada povezuje točno jedna linija. Dokažite da neka kompanija nudi kružno putovanje s neparno mnogo gradova.

0.18. Na pravcu je dano 50 dužina. Dokažite da vrijedi barem jedna od slijedeće dvije tvrdnje:
a) postoji 8 dužina koje imaju zajedničku točku.
b) postoji 8 disjunktnih dužina.

0.19. Neka su $C_1, ..., C_n$ kružnice radijusa 1 takve da se nikoje dvije ne diraju (samo u jednoj točki) i da je dio ravnine sadržan unutar tih krućnica povezan. Dokažite da je $|S| \geq n$ pri čemu je

$$S = \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} C_i \cap C_j,$$

skup svih presjeka danih kružnica.

0.20. (IMO 2002/6) Neka su $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_n$ kružnice polumjera 1 u ravnini, pri čemu je $n \geq 3$. Označimo njihova središta redom s $O_1, O_2, ..., O_n$. Pretpostavimo da nijedan pravac nema zajedničkih točaka s više od dvije promatrane kružnice. Dokažite nejednakost

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{|O_i O_j|} \leq \frac{(n-1)\pi}{4}.$$