GRUPA ZA TREĆI RAZRED U V. GIMNAZIJI

Matija Bašić

Zadaci iz geometrije

1. Dvije kružnice se diraju u točki B. Tangenta na jednu kružnicu u točki A sječe drugu kružnicu u točkama C i D. Dokaži da je točka A jednako udaljena od pravaca BC i BD. (Litva 2006.)
2. Neka je $ABCD$ tetivni četverokut, a E sjecište njegovih dijagonala. Neka je F na stranici AB, a G na CD tako da je $BF/AB = CG/CD$. Dokaži da se okomice kroz G na AC, kroz F na BD i kroz E na AD sijeku u jednoj točki. (UK 2006.)
3. Simetrale kuteva trokuta ABC sijeku nasuprotne stranice u točkama A_1, B_1, C_1. Dokaži: ako je $BA_1B_1C_1$ tetivan, onda je

$$\frac{BC}{AC+AB} = \frac{AC}{AB+BC} + \frac{AB}{BC+AC}.$$

(Mongolija 2000.)
4. Ako su težišnice iz vrhova B i C trokuta ABC okomite, tada je $\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma \geq 2/3$. Dokaži! (MFL 7.5.)
5. Ako je točka P na stranici BC trokuta ABC takva da je $\frac{BP}{PC} = \frac{m}{n}$, dokaži da je $mb^2 + nc^2 = (m+n)AP^2 + mPC^2 + nPB^2$. (MFL 7.14.)
6. Trokut ABC je pravokutan s pravim kutom kod vrha A. Kvadrati $CBHK, ACDE, BAGF$ konstruirani su s vanjske strane trokuta ABC. Na dužini HK izabrana je točka Q tako da je $AQ \perp BC$. Dokaži da pravci AQ, BD, CF prolaze istom točkom. (MFL 7.33.)
7. Neka je ABC šiljastokutan trokut takav da je $AB \neq AC$. Kružnica kojoj je promjer BC siječe stranice AB i AC u točkama M i N. Polovište stranice BC je točka O. Sjecište simetrala kutova $\angle BAC$ i $\angle MON$ je točka R. Dokažite da se kružnice opisane trokutima BMR i CNR sijeku u točki na stranici BC. (IMO 2004.)
8. Neka je I točka na simetrali kuta $\angle BAC$ trokuta ABC, a M i N redom točke na stranicama AB i AC, takve da je $\angle ABI = \angle NIC$ i $\angle ACI = \angle MIB$. Dokažite da je I središte opisane kružnice trokutu ABC ako i samo ako su točke M, N, I kolinearne. (Hrvatska 2003.)
9. Neka je $ABCD$ tetivni četverokut. Neka su P, Q, R nožišta okomica iz točke D na pravce BC, CA, AB. Dokaži da je $PQ = QR$ ako i samo ako se simetrale kutova $\angle ABC$ i $\angle ADC$ sijeku u točki koja leži na pravcu AC. (IMO 2003.)
10. U šiljastokutnom trokutu ABC s polumjerom opisane kružnice R, visine AD, BE, CF imaju duljine h_1, h_2, h_3, a t_1, t_2, t_3 su duljine odsječaka tangenti iz A, B, C na opisanu kružnicu trokutu DEF. Dokaži

$$\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{t_i}{\sqrt{h_i}}\right)^2 \leq \frac{3}{2}R.$$

(Turska 2000.)

Napomena: Ovi zadaci su složeni da bi se kroz njih provježbale karakteristične točke trokuta, tetivni četverokuti, teorem o tetivi i tangenti, Ptolomjev, Cevin, Stewartov, o simetrali kuta, o potenciji točke s obzirom na kružnicu, sjecištu simetrale kuta i simetrale nasuprotne stranice, te koji put primjenila trigonometrija. Dani su zadaci slični onima kakvi se pojavljuju na izboru za olimpijsku ekipu.

Zadaci iz trigonometrije

1. Dokaži da u svakom trokutu vrijedi

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma.$$

2. (MFL 9.6.) Ako je

$$\frac{\sin(x-\alpha)}{\sin(x-\beta)} = \frac{a}{b}, \frac{\cos(x-\alpha)}{\cos(x-\beta)} = \frac{A}{B}, aA + bB \neq 0,$$

koliko je $\cos(\alpha - \beta)$?
3. (MFL 9.1.) a) Neka je $n > 1$ prirodan broj. Koliko je

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\dots\sin\frac{n-1}{n}\pi?$$

b) Odredi

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{7}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{7}.$$

4. (IMO 1960.) Dan je pravokutan trokut ABC čija je hipotenuza duljine a, podijeljena na n jednakih dijelova (n neparan). Neka je α kut pod kojim se iz točke A vidi onaj od n dijelova koji sadrži polovišta hipotenuze. Ako je h visina trokuta, dokaži

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4nh}{(n^2-1)a}.$$

5. (IMO 1960.) Dan je pravilan kružni stožac u koji je upisana kugla. Oko te ugle opisan je jednakokračan kružni valjak čija osnovica leži u ravnini osnovice danog stošca. Neka je V_1 volumen stošca i V_2 volumen valjka.
a) Dokaži da nije moguće $V_1 = V_2$.
b) Nađi najmanji broj k za koji je $V_1 = kV_2$.
6. Riješi jednadžbu $\cos^2 x + \cos^2 2x + cos^2 3x = 1$.
7. (IMO 1974.) Dan je trokuta ABC. Dokaži da nejednakost $\sin\alpha\sin\beta \leq \sin^2\frac{\gamma}{2}$ vrijedi ako i samo ako na stranici AB postoji točka D takva da je duljina CD geometrijska sredina duljina AD i BD.
8. (IMO 1966.)Ako su a, b, c duljine stranica i α, β, γ nasuprotni kutovi trokuta kod kojeg je $a + b = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}(a\operatorname{tg}\alpha + b\operatorname{tg}\beta)$, dokaži da je taj trokut jednakokračan.

Zadaci iz stereometrije i vektora

1. Dana je kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kod koje je točka M središte strane AA_1B_1B, N je polovište od CC_1, dok točka K leži na bridu CD tako da je $DK = \frac{1}{4}CD$. Ravnina koja adrži točke M, N, K dijeli kocku na dva poliedra. Odredi omjer njihovih volumena.
2. Odredite skup svih točaka triedra takvih da je zbroj njihovih udaljenosti od strana triedra jednak zadanom pozitivnom broju a.
3. Na sferi su izabrane četiri točke tako da je udaljenost svakih dviju jednaka. Nađi kut između polumjera koji pripadaju dvjema od tih točaka.
4. Tri brida tetraedra imaju duljinu a, dok preostala tri brida imaju duljinu b, tako da nijedna njegova strana nije jednakostraničan trokut. Izračunati njegov volumen! Za kakve a i b je zadatak moguć?

5. Dokažite da u svakom konveksnom poliedru postoji strana koja ima manje od 6 bridova. (Koristi Eulerovu fomulu $2 = \#vrhova - \#bridova + \#strana$.)
6. Nađite kut između težišnica BD i CE strana ABC i SAC pravilnog tetraedra $SABC$.
7. U konveksnom četverokutu $ABCD$ točke G_1, G_2, G_3, G_4 su redom težipta trokuta BCD, ACD, ABD, ABC, dok su A_1, B_1, C_1, D_1 točke centralno simetrične točkama A, B, C, D u odnosu na G_1, G_2, G_3, G_4. Dokažite da je $ABCD$ paralelogram ako i samo ako je $A_1B_1C_1D_1$ paralelogram.
8. Neka su $A_1A_2...A_n$ i $B_1B_2...B_n$ pravilni poligoni sa središtima A i B. Dokaži

$$\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \cdots + \overrightarrow{A_nB_n} = n\overrightarrow{AB}.$$

9. Dokaži da su polovišta bilo kojeg četverokuta vrhovi paralelograma.
10. Dokaži da u trokutu ABC s ortocentrom H i središtem opisane kružnice O vrijedi

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

11. U trokutu ABC točka M dijeli stranicu AB u omjeru 1:3, a točka T dijeli dužinu MC u omjeru 1:5. Neka je N presjek pravaca BM i AC. Odredi omjer $AN : NC$.
12. Neka su P, Q, R, S polovišta stranica BC, CD, DA, AB konveksnog četverokuta $ABCD$. Dokaži da je

$$4(AP^2 + BQ^2 + CR^2 + DS^2) \leq 5(AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2).$$

Zadaci iz teorije brojeva

1. Ako su a, b relativno prosti prirodni brojevi onda postoje cijeli brojevi x, y takvi da je $ax + by = 1$. Dokaži!
2. Riješi jednadžbu $1001x + 57y = 10$ u cijelim brojevima. Opiši kako se općenito rješavaju linearne diofantske jednadžbe $ax + by = c$.
3. Za rješenje (x, y, z) jednadžbe $x^2 + y^2 = z^2$ kažemo da je temeljna Pitagorina trojka ako je $M(x, y, z) = 1$. Odredi sva temeljna rješenja u skupu prirodnih brojeva, te onda odredi sve Pitagorine trojke koje sadrže broj 39.
4. U cijelim brojevima riješi jednadžbe a) $xy + 3y = 11$ b) $3x^2 - 2y = 1 + xy$.
5. Odredite sve prirodne brojeve n za koje jednadžba

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$$

ima točno 5 rješenja (x, y) u prirodnim brojevima.
6. U prirodnim brojevima riješi jednadžbu $1! + 2! + 3! + \cdots + x! = y^2$.
7. Nađite sva rješenja jednadžbe $k!l! = k! + l! + m!$ u prirodnim brojevima.
8. Nađi sve proste brojeve p i q za koje je $(p+1)^q$ potpuni kvadrat.
9. Dokaži da ima beskonačno mnogo prostih brojeva oblika $4k + 1$.
10. Riješi jednadžbu $3^m + 4^n = 5^k$ u prirodnim brojevima.
11. Odredi sve prirodne a, b takve da je $a^{5a} = b^b$.
12. Riješi jednadžbu $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ u cijelim brojevima.
13. Riješi jednadžbu $19x^3 - 84y^2 = 1984$ u cijelim brojevima.
14. Odredi sva rješenja u prirodnim brojevima jednadžbe $x^2 + xy = y^2 + 1$ za $x \neq y$.
15. Riješi jednadažbu $x^3 + 8x^2 - 6x + 8 = y^3$.

Napomena. Pročitati članak Dijane Kreso "Život između dva kvadrata" i Playmathu.

Zadaci iz kombinatorike

1. Neka je G jednostavan graf. Dokažite da vrhove od G možemo obojati u dvije boje, crnu i bijelu, tako da svaki vrh grafa G ima različitu bojuod barem polovine svojih susjeda.
2. Formula vozi po kružnoj stazi dugoj n kilometara. Uz stazu se nalaze benzinske stanice koje sve zajedno sadrže točno onoliko benzina koliko je potrebno da se pređe n kilometara. Pokažite da postoji mjesto na stazi s kojeg formula može krenuti da obiđe cijelu stazu.
3. 8 pjevača sudjeluje na festivalu. Ukupno se održava m koncerata. Na svakom koncertu nastupe točno 4 pjevača. Ako je broj zajedničkih koncerata za svaki par pjevača jednak, odredi minimalan mogući m.
4. Na nekom otoku se nalazi 13 žutih, 15 plavih i 17 crvenih kameleona. Kad se dva kameleona različite boje sretnu oni istovremeno promjene boju u treću. Je li moguće da nakon nekog vremena svi kameleoni budu iste boje?
5. Je li moguće ploču $2^n \times 2^n$ bez jednog kvadratića 1×1 popločiti sa oblici dobivenim tako da se kvadratu 2×2 oduzme jedan kvadratić 1×1?
6. Dane su $2n + 3$ točke u ravnini tako da se nikoje tri ne nalaze na istom pravcu i nikoje četiri na istoj kružnici. Dokaži da postoji kružnica K koja prolazi kroz neke tri od zadanih točaka i unutar koje se nalazi točno n zadanih točaka.
7. Može li se kvadratna ploča 50×50 popločiti sa oblicima dobivenim tako da se na pravokutnik 1×3 na sredinu stavi kvadratić 1×1?
8. Može li se iz svakog 9-eročlanog podskupa prirodnih brojeva odabrati 4 različita elementa a, b, c, d tako da brojevi $a + b$ i $c + d$ daju isti ostatak pri dijeljenju s 20?

Napomena: Treba znati indukciju, invarijante, Dirichletov princip, bojanja, dvostruko prebrojavanje, te teorem o srednjoj vrijednosti.

Sretno rješavanje, ako zapnete označite zadatak. Pretpostavljam da ste prošli državna i da ste dosta od ovih zadataka već vidjeli, ali ti su zadaci tu da bi se prisjetili neke ideje i da na njih ne trošite više vrijeme.