Diofantske jednadžbe koje svaki šonjo zna riješiti, a olimpijcima je korisno znati

Faktorizacija. *(Irska 2003.) U cijelim brojevima riješi jednadžbu*

$$(m^2+n)(m+n^2)=(m+n)^3.$$

Rješenje. Ovo je najvažnija metoda pri rješavanju diofantskih jednadžbi. Treba zapamtiti da je uvijek lakše riješiti problem koji uključuje nekakav produkt nego sumu. Ideja je svesti jednadžbu na oblik u kojem je lijeva strana **produkt** nekih izraza, a desna ima poznat rastav na faktore. Tada preostaje provjeriti konačno slučajeva.
Početna jednadžba je ekvivalentna $mn(mn-3m-3n+1)=0$. Odakle imamo rješenja $(0,n), n\in\mathbb{Z}$ i $(m,0), m\in\mathbb{Z}$ ili da je $mn-3m-3n+1=0$. To možemo faktorizirati kao $(m-3)(n-3)=8$. Kako je jednadžba **simetrična**, bez smanjenja općenitosti (BSO) pretpostavimo $m\geq n$, pa imamo slučajeve:

$$m-3=8, n-3=1$$

$$m-3=4, n-3=2$$

$$m-3=-1, n-3=-8$$

$$m-3=-2, n-3=-4.$$

Sva rješenja (uključujući simetrične slučajeve) su dana sa

$$(m,n)\in\{(0,n)|n\in\mathbb{Z}\}\bigcup\{(m,0)|m\in\mathbb{Z}\}\bigcup$$

$$\{(11,4),(4,11),(7,5),(5,7),(2,-5),(-5,2),(1,-1),(-1,1)\}.$$

Zadatak 1. *U ovisnosti o N odredi broj rješenja jednadžbe $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{N}$.*

Zadatak 2. *Neka je $p>3$ prost broj. Odredi sve parove cijelih brojeva (a,b) za koje vrijedi*

$$a^2+3ab+2p(a+b)+p^2=0.$$

Svojstva razlomaka. *Odredi cijele brojeve a takve da je* $\frac{a^3-a^2-a-1}{3a-1} \in \mathbb{Z}$.

Rješenje. Razlomak treba zapisati tako da je brojnik manjeg stupnja nego nazivnik i tada odrediti slučajeve u kojima je brojnik djeljiv s nazivnikom.
Prvo treba primjetiti da a^3 nije djeljiv s $3a$, pa koristimo činjenicu da je i $3 \cdot \frac{a^3-a^2-a-1}{3a-1} \in \mathbb{Z}$. Rastavljanjem dobivamo da $a^2 + \frac{2a^2+3a+3}{3a-1} \in \mathbb{Z}$, pa ponavljamo postupak. Dobivamo $a^2-2a+11+\frac{38}{3a-1} \in \mathbb{Z}$. Zato je $3a-1 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 19, \pm 38\}$. Odnosno $3a \in \{0, 2, -1, 3, -18, 20, -37, 39\}$. Zbog uvjeta $a \in \mathbb{Z}$ dobivamo $a \in \{0, 1, -6, 13\}$.
Ovo je vrlo jednostavan zadatak. U zadacima se često pojavljuje više varijabli, a spomenimo da je neki put važno koristiti **nejednakost** *nazivnik* $\leq$ *brojnik*!

Zadatak 3. *(IMO 1998) Odredi sve parove prirodnih brojeva* (x, y) *takve da* $xy^2 + y + 7$ *dijeli* $x^2y + x + y$.

Zadatak 4. *(IMO 1994) Odredi sve parove prirodnih brojeva* (m, n) *za koje* $mn - 1$ *dijeli* $n^3 + 1$.

Zadatak 5. *(Shortlist 1995) Odredi sve parove prirodnih brojeva* (x, y) *za koje* $x + y^2 + z^3 = xyz$, *gdje je* $z = M(x, y)$.

Smještanje među kvadrate/kubove. *Pokaži da* $n^2 + n + 1$ *nije potpun kvadrat ni za koji prirodan broj* n.

Rješenje. Dovoljno je primjetiti da je $n^2 < n^2 + n + 1 < (n+1)^2$ za svaki prirodan broj n. Kako su n^2 i $(n+1)^2$ **uzastopni** kvadrati između njih se ne može nalaziti kvadrat, pa $n^2 + n + 1$ nije potpun kvadrat.
Ova metoda je jako korisna, a treba ju uvježbati kroz teže zadatke, često se primjenjuje na diskrimanantu kvadratne jednadžbe čija rješenja trebaju biti cjelobrojna.

Zadatak 6. *(HMO 2000.) Odredi sve parove prirodnih brojeva* (x, y) *za koje je* $(\frac{2x^3}{y} + 1)^2 = 9 + 4y$.

Zadatak 7. *Odredi sve parove prirodnih brojeva* (x, y) *za koje je* $x^3 + 8x^2 - 6x + 8 = y^3$.

Zadatak 8. *(IMO 2002) Odredi sve parove prirodnih brojeva* (m, n) *za koje* $2mn^2 - n^3 + 1$ *dijeli* m^2.

Ograničavanje. *Odredi prirodne brojeve* a, b, c *takve da je* $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.

Rješenje. Ovdje je potrebno uočiti da ne mogu sva tri broja a, b, c biti proizvoljno veliki. Dapače, $a > 3, b > 3, c > 3$ povlači da je $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1$. Zato je barem jedan od tih brojeva manji od 3. BSO možemo pretpostaviti $a \leq b \leq c$. Sada razlikujemo 3 slučaja:
1° $a = 1 \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$. Kontradikcija!
2° $a = 2 \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$. Sada opet **ograničavamo**! Uočimo da barem jedan od brojeva b i c mora biti manji od 4. BSO $b \leq 4$. Slučaj $b = 2$ vodi na kontradikciju, a preostala dva daju rješenja (2, 3, 6) i (2, 4, 4).
$3^\circ a = 3 \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2}{3}$. BSO $b \leq 3$, pa je $b = 3$ i imamo rješenje (3, 3, 3).

Dakle, rješenja su trojke (3, 3, 3), (2, 3, 6) i (2, 4, 4), te njihove permutacije! Uvijek maksimalno iskoristite **simetriju** u bilo kojem zadatku!

Zadatak 9. *(UK) Odredi prirodne brojeve* a, b, c *takve da je* $2 = abc - a - b - c$.

Zadatak 10. *(Bugarska 2005.) Odredi sve trojeke prirodnih brojeva* (x, y, z) *takve da je*

$$\sqrt{\frac{2005}{x+y}} + \sqrt{\frac{2005}{y+z}} + \sqrt{\frac{2005}{z+x}}$$

cijeli broj.

Eksponencijalne. *Odredi prirodne brojeve* a, b *takve da je* $a^{5a} = b^b$.

Rješenje. Vrlo korisno može biti uvođenje najmanjeg zajedničkog djelitelja (**mjere**) dvaju brojeva. To je korisno jer se pri rješavanju mnogo toga može zaključiti ako su neki faktori relativno prosti. Npr. ako je umnožak dvaju relativno prostih brojeva potpun kvadrat onda su i ti brojevi potpuni kvadrati. Dokaži!
Primjetimo da mora vrijediti $b \geq a$. Neka je $d = M(a, b), a = dp, b = dq, M(p, q) = 1$. Tada početna jednažba prelazi u $d^{5dp}p^{5dp} = d^{dq}q^{dq}$, odnosno nakon potenciranja sa $1/d$ u $d^{5p-q}p^{5p} = q^q$. Ovdje smo iskoristili da je $q \geq p$, pa mora biti $5p - q \geq 0$ jer bi suprotna nejednakost vodila na kontradikciju. Sada možemo iskoristiti da je $M(p, q) = 1$, kako p mora dijeliti q^q zaključujemo da je $p = 1$. Zbog $5p - q \geq 0$ imamo $q \leq 5$. Uvrštavanjem $q = 0, 1, .., 5$ dobivamo da je rješenje dano sa $(a, b) \in \{(1, 1), (256, 1024)\}$.

Zadatak 11. *(IMO 1997) Odredi prirodne brojeve* a, b *takve da je* $a^{b^2} = b^a$

Zadatak 12. *(Iran 1998) Neka su* x, a, b *prirodni brojevi takvi da je* $x^{a+b} = a^b b$. *Dokaži da je* $a = x$ *i* $b = x^x$.

Rekurzivno zadan skup rješenja. *(Bugarska 1996.) Dokaži da za svaki prirodan broj* $n \geq 3$ *postoje neparni prirodni brojevi* x_n, y_n *takvi da je* $7x_n^2 + y_n^2 = 2^n$.

Rješenje. Za $n = 3$ imamo rješenje $x_3 = y_3 = 1$. Pretopostavimo da smo našli odgovarajuće rješenje jednažbe za neki prirodan broj n. Primjetimo da je

$$7(\frac{x_n \pm y_n}{2})^2 + (\frac{7x_n \mp y_n}{2})^2 = 2(7x_n^2 + y_n^2) = 2^{n+1}.$$

Jedan od brojeva $\frac{x_n+y_n}{2}$ i $\frac{|x_n-y_n|}{2}$ je neparan jer im je suma neparna (jednaka $max\{x_n, y_n\}$, pa taj neparan broj uzimamo za x_{n+1}, a onda je određen i y_{n+1}.
Ovo je samo jedan od raznih primjera kada diofantska jednadžba ima beskonačno mnogo rješenja. Dva još poznatija primjera su **Pitagorina** i **Pellova** (ispravnije Fermatova) jednadžba čija rješenja također nalazimo rekurzivno. Za vježbu probajte i nešto drugačije zadatke.

Zadatak 13. *(Shortlist 2002) Postoji li prirodan broj m takav da jednadžba*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{abc}=\frac{m}{a+b+c}$$

ima beskonačno mnogo rješenja u prirodnim brojevima?

Zadatak 14. *Nađi sva rješenja jednadžbe $x^2+y^2+z^2=3xyz$.*

Beskonačan spust. *Dokaži da $x^2+y^2+z^2=2xyz$ nema rješenja u prirodnim brojevima.*

Rješenje. Ovdje ćemo koristiti **parnost**. Pogledajmo kakve parnosti moraju biti brojevi x, y, z. Zbog simetrije promatramo 4 slučaja: svi su parni, jedan je neparan, jedan je paran, svi su neparni. Ako je neparan broj neparnih onda je lijeva strana neparna, a desna parna. Kontradikcija! Ako su pak dva broja neparna, a jedan paran, onda je desna strana djeljiva sa 4, a lijeva daje ostatak 2 pri dijeljenju sa 4! Uvjerite se u to i upamtite ovaj trik! Dakle, jedino je moguće da su sva tri broja parna.
Ako znate da je neki broj paran onda to uvrstite u jednadžbu! $x=2x_1, y=2y_1, z=2z_1$. Nakon uvrštavanja i dijeljenja sa 4 dobivamo jednadžbu $x_1^2+y_1^2+z_1^2=4x_1y_1z_1$. Opet ponavljamo isto razmišljanje, pa dobivamo $x_1=2x_2, y_1=2y_2, z_1=2z_2$ i $x_2^2+y_2^2+z_2^2=8x_2y_2z_2$. Ovaj postupak bi mogli ponavljati u **beskonačnost** jer možemo indukcijom pokazati da je $x_n^2+y_n^2+z_n^2=2^{n-1}x_ny_nz_n$, te da je $x=2x_1=4x_2=...=2^nx_n=....$ Znači svaka potencija od 2 mora dijeliti x, a to je moguće samo ako je $x=0$. Isto zaključujemo za y i z. No, kako tražimo samo rješenja u prirodnim brojevima slijedi da jednadžba nema rješenja.
Drugi način, koji zvuči malo preciznije, koristi metodu kontradikcije. Svaki paran broj možemo zapisati u obliku 2^st, gdje je s prirodan broj, a t **neparan**. Kako su x, y, z parni neka je 2^s najveća potencija od 2 koja dijeli sva tri broja. Tada možemo podijeliti jednadžbu sa 2^{2s}. No, sada je s lijeve strane barem jedan kvadrat neparan, a desna strana parna, pa kontradikcija slijedi kako smo opisali u uvodnom razmatranju!
Navedimo još da jednadžba $x^2+y^2+z^2=kxyz$ ima rješenje u prirodnim brojevima samo za $k=1$ i $k=3$.

Kongruencije. *Dokaži da jednadžba $19x^3-84y^2=1984$ nema rješenja u cijelim brojevima.*

Rješenje. Ovdje ćemo kao u prethodnoj metodi koristiti parnost, ali ćemo promatrati djeljivost i s nekim drugim brojevima. Razmatranje parnosti nas dovodi do jednadžbe $19a^3-21b^2=62$. Sada je ključno odabrati pravi broj za promatranje djeljivosti.
Bitno je znati da se ostaci pri dijeljenju kvadrata, kubova, potencija od 2 (zapravo svih nizova brojeva oblika $(n^k)_n$ ili $(a^n)_n$, gdje su k i a neki određeni prirodni brojevi) sa nekim prirodnim brojem p periodično ponavljaju.
Promatrajmo djeljivost sa 7. Kubovi pri dijeljenju sa 7 **periodično daju ostatke** 0, 1, 1, 6, 1, 6, 6. Dakle, $19a^3-21b^2 \equiv 5\cdot\{0,1,6\}-0(\mod 7)$. Odnosno lijeva strana jednadžbe daje ostatke 0, 5 ili 2 modulo 7, dok desna daje 6. Kontradikcija!

Zadatak 15. *(Mediteransko 2003) Dokaži da jednadžba* $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z + 1$ *nema rješenja u racionalnim brojevima.*

Zadatak 16. *Riješi jednadžbu* $1! + 2! + 3! + ... + n! = m^2$ *u prirodnim brojevima.*

Zadatak 17. *Riješi jednadžbu* $x^2 + 5 = y^3$ *u prirodnim brojevima.*

Zadatak 18. *Odredi prirodna rješenja jednadžbe* $3^x + 4^y = 5^z$.

Viete jumping *(IMO 1988) Neka su* a, b *prirodni brojevi takvi da* $ab + 1$ *dijeli* $a^2 + b^2$. *Dokaži da je* $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ *potpun kvadrat.*

Rješenje. Ovo je vrlo poznat problem, a rješenje koristi metodu koja se u posljednje vrijeme često pojavljuje na natjecanjima. Rješenje je varijacija metode beskonačnog spusta (odnosno ekstremnog elementa).
Neka je $k = \frac{a^2+b^2}{ab+1}$. Označimo, za fiksan k, sa S skup svih parova **nenegtivnih** cijelih brojeva (x, y) takvih da je

$$k = \frac{x^2 + y^2}{xy + 1}.$$

Pokazat ćemo da se u skupu S nalazi i par (x, y) takav da je $y = 0, k = x^2$, čime će tvrdnja zadatka biti dokazana.
Pretpostavimo suprotno, da k nije potpun kvadrat. Neka je $(x, y) = (A, B) \in S$ par za koji je zbroj $x + y$ **minimalan**. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $A \geq B > 0$. Promotrimo jednadžbu

$$k = \frac{x^2 + B^2}{xB + 1},$$

koja je ekvivalentna **kvadratnoj jednadžbi**

$$x^2 - kbx + B^2 - k = 0.$$

Znamo da je jedno rješenje ove jednadžbe $x_1 = A$ pa označimo drugo rješenje te jednadžbe s x_2. Prema **Vieteovim formulama** dobivamo

$$x_2 = kB - A = \frac{B^2 - k}{A}.$$

Iz prve jednakosti zaključujemo da je x_2 cijeli broj, a iz druge da taj broj različit od 0 (u suprotnom bi vrijedilo $k = B^2$, suprotno pretpostavci). Nadalje, x_2 ne može biti negativan broj jer bi tada imali $0 = x_2^2 - kBx_2 + B^2 - k \geq x^2 + k + B^2 - k > 0$. Dakle, $(x_2, B) \in S$. No, budući da je $A \geq B$ slijedi $x_2 = \frac{B^2-k}{A} < A$, što (zbog $x_2 + B < A + B$) povlači kontradikciju s minimalnošću sume $A + B$. Zaključujemo da je pretpostavka bila pogrešna pa vrijedi tvrdnja zadatka.

Zadatak 19. *Neka su* a, b *prirodni brojevi takvi da* ab *dijeli* $a^2 + b^2 + 1$. *Dokaži da je* $\frac{a^2+b^2+1}{ab} = 3$.

Zadatak 20. *(IMO 2007) Neka su a, b prirodni brojevi takvi da $4ab - 1$ dijeli $(4a^2 - 1)^2$. Dokaži da je $a = b$.*

Kvadratni ostaci *Dokaži da jednadžba $y^2 = x^3 + 7$ nema rješenja u prirodnim brojevima.*

Rješenje. Ovdje je mnogo teže naći odgovarajući modul, pa ćemo koristiti jednu vrlo poznatu tvrdnju: *Broj oblika x^2+1 nema djelitelj oblika $4k+3$* (kaže se da je -1 **kvadratni neostatak** modulo $4k + 3$). Dokažite tu tvrdnju koristeći mali Fermatov teorem.
Dana jednadžba je ekvivalentna sa $y^2 + 1 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$. Ako je x paran, tada y mora biti neparan, pa je desna strana djeljiva sa 4, a lijeva daje ostatak 2. Kontradikcija! Ako je $x = 2z + 1$, tada je $x^2 - 2x + 4 = 4z^2 + 3$, pa $y^2 + 1$ mora imati djelitelj oblika $4k + 3$, što je nemoguće!

Zadatak 21. *(Bugarska 2005) Riješi u prirodnim brojevima jednadžbu $z^2 + 1 = xy(xy + 2y - 2x - 4)$.*

Dodatni zadaci

Zadatak 22. *(Hong Kong 2001) Odredi rješenja jednadžbe $x^3+y^3+z^3 = nx^2y^2z^2$ u prirodnim brojevima.*

Zadatak 23. *(Mediteransko 2002) Odredi parove prirodnih brojeva (x, y) takvih da $y|x^2 + 1$ i $x^2|y^3 + 1$.*

Zadatak 24. *(IMO 1990) Nađite sve prirodne brojeve n takve da $n^2|2^n + 1$.*

Zadatak 25. *(Indija 1995) Odredite sve prirodne brojeve x, y, z i prost broj p takve da je $x^p + y^p = p^z$.*

Zadatak 26. *(shortlist 2000) Nađite sve trojke prirodnih brojeva (a, n, m) takve da $a^m + 1|(a + 1)^n$.*

Zadatak 27. *(shortlist 1998) Odredite sve prirodne brojeve n za koje postoji $m \in \mathbb{Z}$ tako da $2^n - 1|m^2 + 9$*