Beskonačno veliko i beskonačno malo

Matija Bašić

Uvod

Ovo predavanje je uvod u matematičku analizu i kroz jednostavnije pojmove ćemo se pozabaviti skupovima, nizovima i funkcijama. Iako će se pojavljivati neki teoremi ovdje neće biti dokazi tih teorema jer su oni prekomplicirani za ovaj nivo. Ako vas zanima nešto više uvijek možete pitati na e-mail ili potražiti neke od naslova iz literature. Cilj predavanja je da se ovlada osnovnim pojmovima kako bi se znali rješavati neki od zadataka na natjecanjima.

Uvod u teoriju skupova

Jedni od rijetkih pojmova koji se u matematici ne definiraju su *skup* i *biti element*. Njih shvaćamo intuitivno. Ovdje ćemo promatrati poznate skupove brojeva i njihove kardinalne brojeve.

Ako promatramo konačne skupove onda je moguće govoriti o broju elemenata tog skupa. Neka $\#X$ označava broj elemenata konačnog skupa X. Tada je npr. $\#\{1,2,3\} = 3, \#\{1,\{2,3\}\} = 2, \#\emptyset = 0$, gdje je $\emptyset$ oznaka za prazan skup, skup bez elemenata. Tek je Cantor u 19. st. primjetio da ima smisla govoriti o broju elemenata u beskonačnim skupovima. Dakle, svakom skupu možemo pridružiti njegov **kardinalni broj** i uvesti oznaku $\#X$, ali moramo biti svjesni da za beskonačne skupove to neće biti prirodan broj- to je zapravo nekakav poseban novi broj kakav još nismo susreli u srednjoj školi! Zanimljivo je uspoređivati skupove prema njihovom kardinalnom broju i zato su nam posebno korisna sljedeća dva pravila.

Definicija 1. Neka su A i B neka dva skupa. Kažemo $\#A = \#B$ ako postoji bijekcija $f : A \to B$. Tada kažemo da su skupovi A i B **ekvipotentni**.
Također kažemo da je $\#A \leq \#B$ ako postoji injekcija $f : A \to B$.

Dosad smo koristili pojmove konačan i beskonačan skup bez da smo formalno rekli što to znači.

Definicija 2. Skup X je **beskonačan** ako je ekvipotentan s barem jednim svojim pravim podskupom. Kažemo da je skup **konačan** ako nije beskonačan.

Primjer 1. Neka je $\mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ skup prirodnih brojeva. Taj skup je beskonačan. Uvedimo oznaku $\#\mathbb{N} = \aleph_0$ (čitaj: *aleph nula*)
Ono što je jako bitno zapamtiti je da za prazan skup, te za beskonačne skupove vrijede neke stvari koje nisu intuitivne. Primjer koji to jako lijepo ilustrira je Russelov paradoks. To je jedan od paradoksa koji su izazvali krizu u matematici početkom prošlog stoljeća, ali su zato uzrokovali razvoj teorije.
Russelov paradoks. Neka je S skup svih skupova koji ne sadrže sami sebe, $S = \{x | x \notin x\}$. Je li $S \in S$?
Primjetite da postoje skupovi koji sadrže sami sebe, takav je na primjer skup $\{1,\{1,\{1,...\}\}\}$

Primjer 2. Neka su $A = \{2,4,6,...\} = 2\mathbb{N}$, $B = \{1,3,5,...\} = 2\mathbb{N} - 1$ redom skup svih parnih prirodnih brojeva i skup svih neparnih prirodnih brojeva. Pokažimo $\#A = \#B = \aleph_0$.

Rješenje. Prva jednakost je dosta intuitivna, parnih brojeva ima koliko i neparnih. Da bi to pokazali, konstruiramo bijekciju $f : A \to B$. Neka je f zadana formulom $f(x) = x - 1$ za svaki $x \in A$, u dijelu o funkcijama smo vidjeli da je to bijekcija. Druga jednakost je ona koja je suprotna našim očekivanjima jer skup ima jednako mnogo elemenata kao i njegov pravi podskup. Promotrimo funkciju $f : \mathbb{N} \to B$ zadanu formulom $f(x) = 2x - 1$. Lako se pokaže da je ova funkcija zaista bijekcija, iz čega slijedi da neparnih brojeva ima jednako mnogo koliko i svih prirodnih! ✓

Zadatak 1. Pokažite da je $\#\mathbb{Z} = \aleph_0$, gdje je $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ skup cijelih brojeva.

Primjer 3. $\#\mathbb{Q} = \aleph_0$.

Rješenje. Zapišimo pozitivne racionalne brojeve u ovakvu tablicu:

$$\begin{array}{ccccccc}
1/1 & , & 1/2 & , & 1/3 & \ldots \\
 & \swarrow & , & \swarrow & & \\
2/1 & , & 2/2 & , & 2/3 & \ldots \\
 & \swarrow & , & \swarrow & & \\
3/1 & , & 3/2 & \ldots & & \\
 & \swarrow & & & & \\
\vdots & & & & &
\end{array}$$

Te zapišimo brojeve u niz počevši od gornjeg lijevog ugla po strelicama. Dobivamo 1, 1/2, 2/1, 1/3, 2/2, 3/1, ... Umetnimo u taj iza iza svakog elementa njemu suprotan, te na početak dodajmo 0. Sada je to niz 0, 1, -1, 1/2, -1/2, 1/3, -1/3,... i lako je opisati bijekciju između $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{N}$. Napravite to! ✓

Primjer 4. $\#\mathbb{R} \neq \aleph_0$.

Rješenje. Pretpostavimo suprotno da postoji bijekcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Tada za svaki prirodni broj točno znamo koji mu je realan broj pridružen. Prema tome možemo zapisati svaki taj realan broj u decimalnom obliku i konsturirati novi realan broj na slijedeći način: stavimo 0 i decimalnu točku, te na na i-to mjesto iza decimalne točke stavimo znamenku koja je različita od znamenke koja stoji na i-tom mjestu u broju koji je bijekcijom f pridružen prirodnom broju i. Nazovimo taj broj c. Kako je f bijekcija, mora postojati prirodan broj k takav da je $f(k) = c$. No, uočimo da $f(k)$ i c imaju različitu k-tu znamenku prema konstrukciji broja c. Kontradikcija! ✓

Ovaj dokaz je dao Cantor i prema njemu se konstrukcija broja c iz dokaza zove *Cantorov dijagonalni postupak*. Kardinalni broj skupa realnih brojeva se označava $\mathfrak{c}$ (kardinalitet kontinuuma). Za skupove koji su ekvipotentni sa skupom prirodnih brojeva kažemo da su *prebrojivi*, a za one koji su ekvipotenti sa skupom realnih brojeva da su *neprebrojivo beskonačni*. Jedna vrlo zanimljiva tvrdnja je da postoji kardinalni broj između $\aleph_0$ i $\mathfrak{c}$. Tu tvrdnju zovemo *hipoteza kontinuuma*. Ona je dosta potaknula razvoj teorije skupova, a u 20. st. je dokazano tu tvrdnju ne možemo ni dokazati ni opovrći! U teoriji skupova ima još mnogo zanimljivih primjera, ali za uvod ovo je sasvim dovoljno.

Skupovi $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$

Iako su skupovi $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$ po nekim svojstvima dosta slični, da bi bolje upoznali njihovu strukturu pogledajmo u čemu se razlikuju. Jasno je da se cijeli brojevi jako razlikuju od realnih. Realne brojeve najčešće poistovjećujemo s nekakvim brojevnim pravcem, a svaka točka tog pravca predstavlja neki realan broj. Kad na tom pravcu promatramo cijele brojeve vidimo da između njih postoje 'praznine' u kojima nema drugih cijelih brojeva. Naime za svaki cijeli broj znamo koji je njegov prethodnik, a koji sljedbenik. Kad tako gledamo, skup racionalnih brojeva je mnogo 'bliži' skupu

realnih. Za realne brojeve ne možemo reći koji je broj nečiji sljedbenik ili prethodnik, iako znamo za svaka dva broja reći koji koji je od njih manji, a koji veći. To je zato što ako uzmemo bilo koja dva realna broja moći ćemo naći racionalan koji se nalazi između njih. Zato kažemo da je skup racionalnih brojeva **gust** u skupu realnih.
No, i u racionalnim brojevima također ima nekakvih 'praznina'. To je jako zbunjivalo stare Grke. Pitagorejci su se morali zavjetovati da nikad neće odati u javnosti da postoje brojevi koji nisu racionalni. Ipak između svaka dva realna broja možemo naći broj koji nije racionalan. Takav je na primjer broj $\sqrt{2}$. To je broj koji kad se pomnoži sa samim sobom daje 2. Znate li dokazati da taj broj nije racionalan? Realne brojeve koji nisu racionalni zovemo iracionalni. Iracionalni brojevi su također gusti u realnima.

Vidimo da zapravo u racionalnim brojevima ne može izvršiti neke operacije. Kao što u prirodnim brojevima ne možemo oduzeti bilo koja dva broja, a u cijelima podijeliti, u racionalnim ne možemo izračunati drugi korijen bilo kojeg broja. No, skup realnih brojeva ne možemo definirati kao 'skup svih korijena racionalnih brojeva' ili nekako slično jer postoje brojevi koji su realni, ali zbrajanjem, množenjem, potenciranjem ili korjenovanjem od njih ne možemo dobiti racionalni. Takve brojeve nazivamo *transcendentalnima*, dok one koje možemo dobiti takvim opercijama zovemo *algebrskima.* Transcendentalan je na primjer broj π ili baza prirodnih logaritama e. Dokazi da oni nisu racionalni su mnogo složeniji. Iako ne koristimo mnogo takvih brojeva njih ima mnogo više nego algebarskih. 'Mnogo više' zapravo znači da su oni glavni krivci zašto skup $\mathbb{R}$ nije prebrojiv!

No onda, u čemu je formalno razlika između $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$? Pokušat ću vam približiti odgovor uz par definicija. Počnimo s racionalnim brojevima.

Definicija 3. Skup $\mathbb{Q} := \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ zovemo skup **racionalnih brojeva**.

No, da bismo definirali realne brojeve treba nam još jedan pojam vezan uz nizove.

Definicija 4. Kažemo da je $S \subseteq \mathbb{R}, S \neq \emptyset$ **omeđen odozgo (odozdo)** ako $\exists M \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi $\forall x \in S, x \leq M (x \geq M)$. Tada broj M zovemo *gornja (donja) međa*, odnosno *majoranta (minoranta) skupa* S.

Definicija 5. Realan broj L koji je najmanja majoranta nepraznog odozgo omeđenog skupa $S \subseteq \mathbb{R}$ zovemo **supremum** skupa S.

Ono što razlikuje realne od racionalnih brojeva je sljedeći aksiom.
Aksiom potpunosti. Svaki neprazan odozgo omeđen skup $S \subseteq \mathbb{R}$ ima supremum u $\mathbb{R}$.
Uz još neke druge aksiome, ovaj aksiom je ključan u definiciji realnih brojeva.

Za racionalne brojeve kako smo ih mi definirali tvrdnja koju bi dobili kad bi u aksiomu potpunosti zamjenili $\mathbb{R}$ sa $\mathbb{Q}$ ne bi vrijedila. Kontraprimjer je niz racionalnih brojeva 3, 3.1, 3.14,... koji dobivamo tako da je n-ti član niza dobiven uzimanjem prvih n znamenki u decimalnom zapisu broja π. Članovi tog niza su elementi nepraznog, odozgo omeđenog skupa u $\mathbb{Q}$ čiji supremum nije u $\mathbb{Q}$.

Literatura

1. Papić, Pavle- 'Uvod u teoriju skupova', Zagreb, 2000.
2. Poonen, Bjorn- 'Infinity: Cardinal Numbers', Berkeley, 1999.

Nizovi i redovi

Matija Bašić

Uvod

Niz je jedan od osnovnih matematičkih pojmova. U srednjoj školi se prvi put ozbiljnije susrećemo s nizovima u 4. razredu, ali već se u nižim razredima osnovne zabavljamo 'pogađajući' pravilnosti u započetom nizu da bi ga znali nastaviti. I natjecateljski zadaci su najčešće slični po tome što želimo o određenom nizu otkriti što više korisnih pravilnosti. No, da bi uopće znali koja su nam to svojstva korisna za zadatak, uvedimo nekoliko pojmova.

Definicija 1. **Niz** je bilo koja funkcija $f : \mathbb{N} \to Y$.
Vidimo da kodomena može biti bilo kakav skup, skup krušaka, skup točaka u prostoru, skup kompleksnih brojeva... Ono što je bitno je da znamo točno koji element nekog skupa želimo da bude prvi, koji peti... Čak možemo i ponavljati elemente! Zato koristimo oznaku $f(n) = x_n$ i tu vrijednost zovemo *član niza*, a čitav niz označavamo sa $(x_n)_n$.
U ovom predavanju ćemo govoriti samo o realnim nizovima- o nizovima za koje je $Y = \mathbb{R}$.
Jedno od najvažnijih svojstava po kojima razlikujemo nizove jest konvergencija. Za određeni niz zanima nas postoji li vrijednost kojoj on 'teži', hoće li nakon nekog vremena svi članovi biti blizu nekog fiksnog broja.

Primjer 1. Najpoznatiji niz je 1,2,3,4,5,..., odnosno $x_n = n$. Očito je da ne postoji neki fiksan broj oko kojeg bi se gomilali gotovo svi prirodni brojevi.

Primjer 2. Svakom srednjoškolcu je poznat niz $x_n = \frac{1}{n}$. Intuitivno je jasno da taj niz nekako teži 0. To nam je očito zato što možemo naći prirodan broj n takav da će od člana x_n nadalje svi članovi niza biti blizu 0 koliko mi to želimo.
Da bi formalno izrazili tu našu intuiciju uvodimo pojam limesa.

Definicija 2. Neka je $(x_n)_n$ niz u $\mathbb{R}$. Za realan broj L kažemo da je **limes** niza $(x_n)_n$ ako $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ vrijedi $|x_n - L| < \varepsilon$.

Sada ono što smo naslutili u primjerima 1. i 2. možemo formalno dokazati.
Napomena. Ako limes niza postoji, onda je taj limes jedinstven. Ako postoji limes L niza $(x_n)_n$, onda za taj niz kažemo da je **konvergentan** ili da **konvergira prema L**. Pišemo $\lim_n x_n = L$.
U praksi se najčešće ne dokazuje sve preko ε, već je dovoljno preko nekih poznatih limesa pokazati da npr. $x_n - L$ teži u 0. Koristimo i oznaku $x_n \to L$.

Definicija 3. Kažemo da je niz $(x_n)_n$:
ograničen odozgo ako postoji $M \in \mathbb{R}$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $x_n \leq M$.
ograničen odozdo ako postoji $m \in \mathbb{R}$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $x_n \geq m$.
ograničen ako je ograničen odozdo **i** odozgo.
rastući ako vrijedi $x_{n+1} \geq x_n \forall n \in \mathbb{N}$.
padajući ako vrijedi $x_{n+1} \leq x_n \forall n \in \mathbb{N}$.
monoton ako je rastući ili padajući.

U prvom primjeru smo vidjeli da je glavni problem bio što niz nije ograničen. Razmislite kroz ove primjere kakva je veza između ograničenosti i monotonosti i konvergencije.

Primjer 3. $x_n = (-1)^n, x_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

Teorem 1. Svaki konvergentan niz u $\mathbb{R}$ je ograničen.

Teorem 2. Svaki monoton i ograničen niz u $\mathbb{R}$ je konvergentan.

Ove teoreme nećemo dokazivati, ali ih treba imati uvijek na umu jer ćemo ih koristiti u većini zadataka. Korisno je još i ovo:

Teorem 3. Neka su $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ konvergentni nizovi. Tada vrijedi:
i) $\lim a_n \pm b_n = \lim a_n \pm \lim b_n$.
ii) $\lim a_n b_n = \lim a_n \lim b_n$.
iii) $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$, uz uvjet da je $b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ i $\lim b_n \neq 0$.

Kroz jedan složeniji primjer ćemo pokazati kako se rješavaju neki zadaci.

Zadatak 1. (Putnam 1977) Niz je zadan sa

$$x_n = \frac{(2^3-1)(3^3-1)(4^3-1)\cdots(n^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)(4^3+1)\cdots(n^3+1)}.$$

Nađi mu limes.

Rješenje. Uočimo prvo da je

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1} = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k+1} \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}.$$

Lako se pokaže (kraćenjem) da je prvi produkt $\frac{2}{n(n+1)}$, a drugi $\frac{n^2+n+1}{3}$. Dakle, tražimo

$$\lim_n \frac{2}{3}\frac{n^2+n+1}{n^2+n} = \frac{2}{3}\lim_n \frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{2}{3}\frac{1+0+0}{1+0} = \frac{2}{3}.$$

Obratite posebnu pozornost kako smo u zadnjem redu izračunali traženi limes korištenjem teorema 3 i činjenice da je $\lim_n \frac{1}{n^m} = 0, \forall m \geq 1$. ✓

Primjer 4. U mnogim situacijama ćemo se susresti i s dva niza koja se rade u 4. razredu, a to su aritmetički i geometrijski niz.
Aritmetički niz je zadan sa $a_0 = a, a_n = a + nd$ za neke realne a i d.
Geometrijski niz je zadan sa $q_0 = a, q_n = aq^n$ za neke realne a i q.

Primjer 5. Još jedan vrlo važan primjer je definicija *baze prirodnih logaritama.* Broj e je jedna od najvažnijih konstanta u matematici.

$$e := \lim_n (1 + \frac{1}{n})^n.$$

Rekurzivno zadani nizovi

Gotovo svi natjecateljski zadaci sa nizovima uključuju *rekurzivno zadavanje niza.* To znači da se članovi niza ne zadaju eksplicitno formulom, već *preko prethodnih članova.* Kod rekurzivno zadanog niza moramo zadati nekoliko početnih članova, njih nazivamo *početni uvjeti.*

Primjer 6. Fibonnaccijev niz je 1,1,2,3,5,... Zadajemo ga početnim članovima $F_1 = 1, F_2 = 1$ i rekurzivnom formulom $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

ZADATAK 2. Odredite rekurzivne relacije za aritmetički i geometrijski niz.
Ovakvo zadavanje niza ima svoje prednosti i mane. Pogledajmo na sljedećem zadatku koje su prednosti ovog načina zadavanja niza.

ZADATAK 3. Niz $(x_n)_n$ zadan je rekurzivno s $x_1 = 0, x_{n+1} = \sqrt{12 + x_n}, \forall n \in \mathbb{N}$. Konvergira li taj niz? Ako da, koji mu je limes?

Rješenje. Ovdje ćemo zapravo vidjeti kako se koristi teorem 2. Dokazat ćemo da je niz monoton i ograničen.
Monotonost. Dokažimo indukcijom da je $x_{n+1} > x_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Baza je očita: $x_1 = 0 < \sqrt{12} = x_2$. Pretpostavimo $x_n > x_{n-1}$. Tada je $12 + x_n > 12 + x_{n-1} \Rightarrow \sqrt{12 + x_n} > \sqrt{12 + x_{n-1}} \Rightarrow x_{n+1} > x_n$.
Ograničenost. Također indukcijom dokažimo $x_n < 4, \forall n \in \mathbb{N}$. Vrijedi $x_1 < 4$. Pretpostavimo $x_{n-1} < 4$. Tada je $12 + x_{n-1} < 16 \Rightarrow \sqrt{12 + x_{n-1}} < \sqrt{16} \Rightarrow x_n < 4$.
Sad kad znamo da je $(x_n)_n$ konvergentan možemo primjeniti limes na rekurzivnu formulu. Neka je $x := \lim x_n$. Dobivamo:
$\lim x_{n+1} = \lim \sqrt{12 + x_n} \Rightarrow x = \sqrt{12 + x} \Rightarrow x = 4$ ili $x = -3$. Naravno kako su svi članovi niza pozitivni jasno je da je $\lim x_n = 4$.
Napomena. Ovdje smo, uz teorem 3, prešutno iskoristili $\lim \sqrt{t_n} = \sqrt{\lim t_n}$ No, o tome ćemo više u dijelu o funkcijama. ✓

ZADATAK 4. Neka su $a, b > 0$. Niz je zadan rekurzivno $x_1 = a, x_2 = b, x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}x_n}, \forall n \in \mathbb{N}$. Nađi mu limes.

Rješenje. U ovom zadatku ne možemo postupiti kao u prethodnom jer nam prelazak na limes daje $x = x$. Ipak, snaći ćemo se uz nekoliko 'trikova'. Prvo supstituirajmo $y_n = \log x_n, A = \log a, B = \log b$.
Sada dobivamo $y_1 = A, y_2 = B, y_{n+2} = \frac{y_{n+1}+y_n}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$. Ovu rekurziju ćemo pokušati riješiti metodom koja se naziva *teleskopiranje.* Zapišimo redom rekurzivne jednadžbe za $n = 1, 2, ...n$:
$2y_{n+2} = y_{n+1} + y_n$
$2y_{n+1} = y_n + y_{n-1}$
$2y_n = y_{n-1} + y_{n-2}$
$\vdots$
$2y_4 = B + y_3$
$2y_3 = A + B$
Sumiramo li sve jednadžbe dobivamo $2y_{n+2} + y_{n+1} = A + 2B$.
Prelaskom na limes slijedi $\lim y_n = \frac{A+2B}{3}$.
Vraćanjem supstitucije dobivamo rješenje $x = \sqrt[3]{ab^2}$
Napomena. Ovdje smo iskoristili $\lim \log t_n = \log \lim t_n$ ✓

Ovdje smo vidjeli da je rekurzivno zadavanje nizova praktično za izračunavanje limesa, ali što ako želimo izreći opći član niza eksplicitno, na primjer koji je tisućiti Fibonaccijev broj?

Postoji metoda kako se iz rekurzivnih relacija računa opći član. Ovdje ćemo to pokazati na nekim jednostavnijim relacijama .

ZADATAK 5. Nađi eksplicitno opći član niza zadanog rekurzivno sa $a_1 = 8, a_2 = 22, a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$.

Rješenje. Ova jednadžba je oblika $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$. To je **homogena** (svi pribrojnici su članovi niza istog stupnja) **linearna** (stupanj je 1) **jednadžba 2. reda** (za zadavanje sljedećeg člana potrebna su dva prethodna) **s konstantnim koeficijentima**.
Rješava se tako da pretpostavimo da ona ima rješenje oblika $a_n = x^n, x \neq 0$, te to uvrstimo u jednadžbu. Dobivamo jednadžbu $x^{n+2} - x^{n+1} - 6x^n = 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$, koju nazivamo **karakterističnom** jednadžbom. Njena rješenja su $x_1 = 2, x_2 = 3$.
Opće rješenje rekurzivne jednadžbe je oblika $a_n = \lambda 2^n + \mu 3^n$, a koeficijente λ i μ određujemo iz početnih uvjeta. Dakle, uvrštavamo $a_1 = 8$ i $a_2 = 22$, što daje sustav:
$n = 1 : 8 = 2\lambda + 3\mu$
$n = 2 : 22 = 4\lambda + 9\mu$.
Iz toga dobivamo $\lambda = 1, \mu = 2$, te je konačno rješenje $a_n = 2^n + 2 \cdot 3^n$. ✓

Situacija se može znatno zakomplicirati, neke slučajeve ćemo navesti, ali ovdje ne možemo ići previše u dubinu, pa je zato dobro potražiti neke od naslova iz literature za dodatne zadatke.
Oprez! Jedan problem je ako su rješenja karakteristične jednadžbe ista ($x_1 = x_2 = x$). Tada rješenje nije u obliku
$a_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n$, već $a_n = \lambda x^n + \mu \mathbf{n} x^n = (\lambda + n\mu)x^n$.
Razlozi zašto je tome tako zalaze preduboko u teoriju koja je iznad razine srednje škole, te je za natjecatelje puno lakše ovo prihvatiti 'zdravo za gotovo'.
Ako jednadžba nije 2. reda, već reda m, također se rješava karakteristična jednadžba. Ako je karakteristična jednadžba oblika $(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \cdots (x - x_l)^{k_l} = 0, k_1 + k_2 + \cdots + k_l = m$, onda je rješenje dano sa

$$a_n = (\lambda_{11} + \lambda_{12}n + \cdots + \lambda_{1k_1}n^{k_1-1})x_1^n + (\lambda_{21} + \lambda_{22}n + \cdots + \lambda_{2k_2}n^{k_2-1})x_2^n + \cdots + (\lambda_{l1} + \lambda_{l2}n + \cdots + \lambda_{lk_l}n^{k_l-1})x_l^n.$$

ZADATAK 6. Odredi opći član Fibonaccijevog niza, $F_1 = 1, F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Rješenje. Prateći postupak iz prethodnog zadatka dobivamo $F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$. ✓

ZADATAK 7. (Shortlist 1981) Niz je zadan rekurzivno $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1+4a_n+\sqrt{1+24a_n}}{16}, \forall n \in \mathbb{N}$. Nađi eksplicitno a_n.

Rješenje. Rekurzivna jednadžba je dosta komplicirana, pa je pokušajmo pojednostaviti. Uvedimo supstituciju $b_1 = 5, b_n = \sqrt{1 + 24a_n}$.
Jednadžba postaje $4b_{n+1}^2 = (b_n + 3)^2$, a kako su svi članovi $b_n > 0$, dobivamo $2b_{n+1} = b_n + 3$.
Ovo je linearna **nehomogena**(zbog " + 3") jednadžba 1. reda. Nehomogene jednadžbe reda m su oblika $h(n) = f(n)$, gdje je $h(n) = 0$ homogena jednadžba reda m, a f nekakva funkcija koju nazovimo nehomogeni ostatak. U ovom zadatku je $f(n) = 3$. Opće rješenje dobijemo tako da rješenju homogene jednadžbe $h(n) = 0$ dodamo funkciju koja je istog oblika kao i f. Npr. ako je funkcija polinom, dodajemo polinom istog stupnja, ali sa neodređenim koeficijentima koje onda računamo iz početnih uvjeta.
Riješimo sada $2b_{n+1} = b_n + 3$. Pripadna homogena jednadžba glasi $2b_{n+1} - b_n = 0$, a njeno opće rješenje je $b_n = \lambda(\frac{1}{2})^n$. Nehomogeni ostatak je $f(n) = 3$. Kako je to konstanta, na rješenje homogene jednadžbe dodajemo konstantu μ. Još su nam potrebni početni uvjeti. $a_1 = 1, a_2 = \frac{5}{8} \Rightarrow b_1 = 5, b_2 = \sqrt{\frac{13}{8}}$. No, da ne računamo s ovim ružnim brojevima, iskoristimo još jedan trik.

Slobodni smo dodefinirati vrijednost niza u 0. To činimo u skladu s rekurzivnom relacijom. Dakle, želimo definirati a_0 tako da bude $a_1 = \frac{1+4a_0+\sqrt{1+24a_0}}{16}$. Rješenja ove jednadžbe po a_0 su 2 i 7. Neka je $a_0 = 2$. Tada je $b_0 = 7$. Sada nađimo λ i μ.
$n = 0 : 7 = \lambda + \mu$
$n = 1 : 5 = \lambda/2 + \mu$.
Rješenje ovog sustava je $\lambda = 4, \mu = 3$. Dakle, $b_n = (\frac{1}{2})^n - 2 + 3$, odnosno $a_n = \frac{((\frac{1}{2})^{n-2}+3)^2-1}{24}$ ✓

Ima primjera i kad je korisno, od nečeg što izgleda kao neki 'opći član', napraviti niz.

Zadatak 8. (IMO 1974.) Dokaži da broj $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} \cdot 2^{3k}$ nije djeljiv s 5 ni za koji $n \in \mathbb{N}$.

Rješenje. Razvijanjem izraza $(1+\sqrt{8})^{2n+1}$ po binomnoj formuli dobivamo

$$
\begin{aligned}
(1+\sqrt{8})^{2n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} \cdot \sqrt{8}^{2k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} \cdot \sqrt{8}^{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} \cdot 8^k + \sqrt{8} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} \cdot 8^k = a_n + b_n\sqrt{8}
\end{aligned}
$$

,gdje su $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$. Dovoljno je pokazati da nijedan od brojeva $b_1, b_2, ...$ nije djeljiv s 5. Ovo se može pokazati na razne načine, učinite to! ✓

Redovi

Jako rano se počinjemo susretati sa raznim sumama. Na primjer, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ je suma prvih n prirodnih brojeva. Primjetite da smo ovdje sumirali prvih n članova niza $(x_n = n)_n$! Prisjetite se kako je zadan geometrijski niz. Izračunajmo sumu prvih n članova tog niza:
$S_n := a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = a(1 + q + q^2 + ...q^{n-1})$.
Primjetimo da je:
$qS_n = a(q + q^2 + ...q^n)$
Sada dobivamo

$$S_n - qS_n = a(1-q^n) \Rightarrow S_n = a\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Vidimo da smo ovako definirali jedan novi niz $(S_n)_n$. Koji su uvjeti konvergencije tog niza? Uvedimo prvo neke pojmove.

Definicija 4. Neka je $(a_n)_n$ niz realnih brojeva. Nizu $(a_n)_n$ pridružujemo niz $(s_n)_n$ definiran s: $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.
Red je uređeni par $((a_n)_n, (s_n)_n)$. Elemente a_n zovemo **opći član reda**, a s_n je **n-ta parcijalna suma reda**. Oznaka za red je $\sum a_n$.

Definicija 5. Za red $\sum a_n$ kažemo da je **konvergentan** ako je niz $(s_n)_n$ parcijalnih suma reda konvergentan. Ako je red konvergentan onda broj $s = \lim s_n$ zovemo **sumom reda**.
Kažemo da je red **divergentan** ako nije konvergentan.

Primjer 7. Razmotrimo sad *geometrijski red*. Već smo pokazali $S_n = a\frac{1-q^n}{1-q}$. Za $|q| < 1$ je $\lim S_n = \lim a\frac{1-q^n}{1-q} = a\frac{1}{1-q}$, jer je $\lim q^n = 0$. Ovo je jedan od najvažnijih redova jer se često konvergencija nekog reda može pokazati uspoređivanjem s geometrijskim.

Zadatak 9. Pokaži da red $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ konvergira i nađimo njegovu sumu.

Rješenje. Uočimo da vrijedi $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Zato imamo $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. Jasno je da je $\lim s_n = 1$, odnosno $\sum \frac{1}{n(n+1)} = 1$. ✓

Zadatak 10. Niz realnih brojeva $(a_n)_n$ zadan je rekurzivno: $a_1 = 1, a_{n+1} = 2004a_n^2 + a_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Izračunajte $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$.

Rješenje. Uočimo da je

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2004a_n^2}{2004a_n a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} - a_n}{2004a_n a_{n+1}} = \frac{1}{2004}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right).$$

Zato je

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2004}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) = \frac{1}{2004}\left(1 - \frac{1}{a_{N+1}}\right).(*)$$

Kako je niz $(a_n)_n$ rastući, on konvergira prema nekoj konačnoj vrijednosti $L \geq 1$ ili je $\lim a_n = +\infty$. Ako bi konvergirao, onda bi iz rekurzivne relacije slijedilo $L = 2004L^2 + L$, što je kontradikcija. Zato je $\lim a_n = +\infty$.
Prelaskom na $\lim_N$ u $(*)$ dobivamo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{2004}$. ✓

Primjer 8. Još jedan bitan primjer je *harmonijski red*, $\sum \frac{1}{n}$. Pokažimo da taj red divergira. Učinimo to tako da pokažemo da je niz $(s_n)_n$ monoton i neograničen.
Monoton je jer je $s_{n+1} = s_n + \frac{1}{n+1} > s_n$.
Za neograničenost koristimo indukciju da dokažemo $s_{2^n} \geq 1 + \frac{1}{2}n, \forall n \in \mathbb{N}$. Za $n = 1$ imamo $s_2 = 1 + \frac{1}{2}$. Pretpostavimo da je $s_{2^n} \geq 1 + \frac{1}{2}n$. Sada je

$$s_{2^{n+1}} = s_{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \cdots + \frac{1}{2^n+2^n} > s_{2^n} + \frac{1}{2^n+2^n} + \frac{1}{2^n+2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n+2^n} =$$

$$s_{2^n} + 2^n\frac{1}{2^{n+1}} = s_{2^n} + \frac{1}{2} \geq 1 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}(n+1).$$

Dakle, dokazali smo da red $\sum \frac{1}{n}$, divergira.
Napomenimo još da vrijedi ograda:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \log n.$$

Za primjenu pogledajte zadatak A2 sa Shortlista 2001 (tekst se nalazi na papiru s dodatnim zadacima).

Zadatak 11. Pokaži koristeći redove da prostih brojeva ima beskonačno.

Rješenje. Pretpostavimo da ima konačno prostih brojeva i neka su to $p_1 = 2, p_2 = 3, ..., p_k$. Promotrimo red $\sum \frac{1}{n}$. Svaki n u nazivniku možemo faktorizirati na potencije prostih faktora. Zato je vrijedi
$\sum \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \cdots\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + \cdots\right)$

Dakle svaki pribrojnik s lijeve strane (za $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$) se pojavljuje i s desne strane kad pomnožimo $a_1 + 1$-vi član iz prve zagrade, $a_2 + 1$-vi član iz druge zagrade, i tako do $a_k + 1$-vi član iz k-te zagrade, i obratno.
S desne strane su geometrijski redovi, pa vrijedi $\sum \frac{1}{n} = (\frac{1}{1-\frac{1}{2}})(\frac{1}{1-\frac{1}{3}})(\frac{1}{1-\frac{1}{5}}) \cdots (\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}})$. Sada je očito da s desne strane imamo neki konačan broj, a s lijeve red koji divergira. Kontradikcija! ✓

Teorem 4. Red $\sum \frac{1}{n^s}$ konvergira za $s \geq 2$, a divergira za $s \leq 1$.

Primjer 9. Euler je dokazao da je $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Primjer 10. Primjer reda koji se često pojavljuje je i slijedeća formula za bazu prirodnih logaritama.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$$

Iz ovoga možemo lako izračunati e do željene preciznosti, a i pokazat ćemo kako se može iskoristiti u nekim zadacima.
Kad se uvedu redovi funkcija može se dokazati da je $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$.
Iza ovih formula stoji mnogo teorije koja nije baš jednostavna, pa to nećemo dokazivati.

Zadatak 12. Neka je zadan $x \in \mathbb{R}$ i niz $(x_n)_n$ zadan rekurzivno $x_1 = 1, x_{n+1} = x^n + nx_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Dokaži da je $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^n}{x_{n+1}}\right) = e^{-x}$.

Rješenje. Neka je $P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^k}{x_{k+1}}\right)$. Tada je

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{x_{k+1} - x^k}{x_{k+1}}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{kx_k}{x_{k+1}} = \frac{n!}{x_{n+1}}.$$

Zato slijedi

$$\frac{1}{P_{n+1}} - \frac{1}{P_n} = \frac{x_{n+2}}{(n+1)!} - \frac{x_{n+1}}{n!} = \frac{x_{n+1}}{(n+1)!}.$$

Sada teleskopiranjem dobivamo

$$\frac{1}{P_n} = \frac{1}{P_1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} == 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Prelaskom na limes dobivamo

$$\lim_{n \to \infty} P_n = \frac{1}{\lim_{n \to \infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)} = \frac{1}{e^x} = e^{-x}.$$

Što smo i htjeli dokazati. ✓

Nizovi i redovi-6^2 zadataka

Nizovi

1. Nađi

$$\lim_n \frac{n^3+n}{2n^3+n^2-5}$$

2. Nađi

$$\lim_n \frac{\sqrt{9n^4-n^3+2n}}{\sqrt[3]{8n^6-5n^2+7}}.$$

3. Niz je zadan sa

$$x_n = \frac{(2^3-1)(3^3-1)(4^3-1)\cdots(n^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)(4^3+1)\cdots(n^3+1)}.$$

Nađi mu limes.
4. (Putnam 1977) Niz $(x_n)_n$ zadan je rekurzivno s $x_1 = 0, x_{n+1} = \sqrt{12+x_n}, \forall n \in \mathbb{N}$. Konvergira li taj niz? Ako da, koji mu je limes?
5. kao zadatak 4. $x_1 = 0, x_{n+1} = \sqrt{4+3x_n}, \forall n \in \mathbb{N}$.
6. kao zadatak 4. $x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = 2^{\sqrt{x_n}}, \forall n \in \mathbb{N}$.
7. Neka su a, b pozitivni brojevi. Niz je zadan rekurzivno $x_1 = a, x_2 = b, x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}x_n}, \forall n \in \mathbb{N}$. Nađi mu limes.
8. Niz $(x_n)_n$ zadan je rekurzivno s $x_1 = 1, x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n^2}, \forall n \in \mathbb{N}$. Je li taj niz ograničen? Pokaži $a_{9000} > 30$.
9. Neka je zadan realan broj $a > 1$, te kao u zadatku 4. niz $x_0 = a, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$.
10. Niz $(a_n)_n$ zadan je rekurzivno s $a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}, \forall n \in \mathbb{N}$. Odredi

$$\lim_{n\to\infty} 4^n(2-a_n).$$

11. Nađi eksplicitno opći član niza zadanog rekurzivno sa $a_1 = 8, a_2 = 22, a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$.
12. Nađi eksplicitno opći član niza zadanog rekurzivno sa $a_1 = 2, a_2 = 7, a_{n+2} = 7a_{n+1} - 12a_n$.
13. Odredi opći član Fibonaccijevog niza.
14. (Shortlist 1981) Niz je zadan rekurzivno

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1+4a_n+\sqrt{1+24a_n}}{16}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Nađi eksplicitno a_n.
15. (MFL) Dan je niz $(y_n)_n$ sljedećom rekurzivnom relacijom

$$y_{n+2} - 8y_{n+1} + 16y_n = 3\cdot 4^n, y_0 = \frac{3}{16}, y_1 = 0.$$

Pokaži da je $y_n = \frac{3}{2}(n-1)(n-2)\cdot 4^{n-2}$.
16. (Shortlist 1991) Neka je $a \in \mathbb{Q}$ takav da je $0 < a < 1$ i $\cos(3\pi a) + 2\cos(2\pi a) = 0$. Dokaži da je tada $a = \frac{2}{3}$.
17. (Shortlist 1994) Neka je $a_0 = 1994$ i $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n+1}, \forall n \in \mathbb{N}_0$. Dokaži da je $1994 - n$ najveći prirodni broj manji ili jednak $a_n, 0 \le n \le 998$.

18. (Shortlist 1996) Zadan je realan broj $a > 2$ i niz $a_0 = 1, a_1 = a, a_{n+1} = \left(\frac{a_n^2}{a_{n-1}^2} - 2\right) a_n$. Pokažite da $\forall k \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{a_i} < \frac{1}{2}(2 + a - \sqrt{a^2 - 4})$.
19. (Županijsko 2004) Dokažite da je za $\forall n \in \mathbb{N}, (\tan 15°)^n + (\cot 15°)^n$ paran prirodan broj.
20. (IMO 1974.) Dokaži da broj $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} \cdot 2^{3k}$ nije djeljiv s 5 ni za koji $n \in \mathbb{N}$.
21. Neka su nizovi $(a_n)_{n\geq 0}$ i $(b_n)_{n\geq 0})$ zadani sa $(1+\sqrt{3})^{2n+1} = a_n + b_n\sqrt{3}, n \in \mathbb{N}$. Nađi rekurzivnu relaciju za te nizove.
22. Odredi uvjete konvergencije niza $(x_n)_n$ zadanoga sa:
1) $x_n > 1, \forall n$;
2) $\frac{1}{2}\left(x_{n+1} - \frac{1}{x_{n+1}}\right) = \frac{x_n+1}{x_n-1}, \forall n$.
23. Odredi uvjete konvergencije niza $(x_n)_n$ zadanoga sa $x_1 \in (0,2)$ i $x_{n+1} = 1 + \sqrt{2x_n - x_n^2}, \forall n \geq 1$.
24. (IMO 1991) Dan je realan broj $a > 1$. Konstruirati ograničen niz $(x_n)_n$ takav da nejednakost $|x_i - x_j| \cdot |i - j|^a \geq 1$ vrijedi za svaki par različitih prirodnih brojeva i, j.
25. (Schwab- Schoenbergova sredina) Neka su a, b pozitivni brojevi takvi da je $a < b$. Rekurzivno su zadani nizovi $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ sa $a_0 = a, b_0 = b$ i

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_{\mathbf{n+1}} b_n}.$$

Pokaži da oba niza imaju isti limes i da je to

$$\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{\arccos \frac{a}{b}}.$$

Redovi

1. Odredi kolika je suma geometrijskog reda.
2. Pokaži da red $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ konvergira i nađi njegovu sumu.
3. Niz realnih brojeva $(a_n)_n$ zadan je rekurzivno: $a_1 = 1, a_{n+1} = 2004a_n^2 + a_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Izračunajte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

4. Niz realnih brojeva $(a_n)_n$ zadan je rekurzivno:

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dokažite da za $\forall N \in \mathbb{N}$ vrijedi $\sum_{n=1}^{N} a_n < 1$.
5. (Shortlist 2003) Promatrat ćemo nizove $(a_j)_j$ i $(b_j)_j$ pozitivnih brojeva za koje je

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots, b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots$$

te označavati

$$c_j = \min\{a_j, b_j\}; j \in \mathbb{N},$$

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n, C_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n; n \in \mathbb{N}.$$

(a) Postoje li takvi nizovi $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ da su $(A_n)_n$ i $(B_n)_n$ neomeđeni, ali $(C_n)_n$ je omeđen?
(b) Hoće li se odgovor na pitanje pod (a) promjeniti ako dodatno pretpostavimo da je $b_j = \frac{1}{j}, j \in \mathbb{N}$?
6. (Državno 1999) Neka je (F_n) Fibonaccijev niz. Izračunajte sumu

$$\frac{F_1}{2} + \frac{F_2}{2^2} + \frac{F_3}{2^3} + \cdots + \frac{F_k}{2^k} + \cdots.$$

7. Pokaži koristeći redove da prostih brojeva ima beskonačno.
8. (Shortlist 2001) Neka je $(a_n)_n$ proizvoljan niz pozitivnih realnih brojeva. Dokaži da nejednakost $1 + a_n > a_{n-1}\sqrt[n]{2}$ vrijedi za beskonačno mnogo prirodnih brojeva n.
9. Neka je zadan $x \in \mathbb{R}$ i niz $(x_n)_n$ rekurzivno $x_1 = 1, x_{n+1} = x^n + nx_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Dokaži da je

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^n}{x_{n+1}}\right) = e^{-x}.$$

10. (IMO 2000) Neka je $n \geq 2$ prirodan i λ pozitivan realan broj. Na početku se n buha nalazi na pravcu, tako da nisu sve buhe u istoj točki. Definiramo skok kao odabir dvije točke A i B u kojima se nalaze buhe, tako da je A lijevo od B, i prelazak buhe iz točke A u točku C desno od točke B tako da je $BC/AB = \lambda$.
Odredite sve vrijednosti λ tako da, za svaku točku M na pravcu i svaki početni položaj buha, postoji niz skokova koje možemo napraviti nakon kojeg se sve buhe nalaze desno od točke M.

11. Pokaži neočekivan rezultat Jakoba Bernoullija iz 17. stoljeća:

$$(a)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{2^k} = 6, (b)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^3}{2^k} = 26.$$

Literatura

1. Andreescu, Titu; Andrica, Dorin- *360 Problems for Mathematical Contests*, Zalau, 2003.
2. Andreescu, Titu; Feng, Zuming; Lee, George- *Mathematical Olympiads, Problems and Solutions From Around the World 2000-2001*, Washington, 2003.
3. Bombardelli, Mea; Brnetić Ilko; Hanjš, Željko- *Matematička natjecanja 1998./99.*, Zagreb, 2000.
4. Engel, Arthur- *Problem Solving Strategies*, New York, 1998.
5. Guljaš, Boris- *Matematička analiza 2*, skripta, Zagreb, 2005.
6. Hanjš, Željko- *Međunarodne matematičke olimpijade*, Zagreb, 1997.
7. Hanjš, Željko- *Matematičko-fizički list*, izvanredni broj, Zagreb 2003.
8. Honsberger, Ross- *Mathematical Diamonds*, Washington, 2003.
9. Veljan, Darko- *Kombinatorna i diskretna matematika*, Zagreb, 2001.
10. Zeitz, Paul- *The Art and Craft of Problem Solving*, New York, 1999.

Funkcionalne jednadžbe

Matija Bašić

Upoznajmo se prvo s nekim osnovnim pojmovima i svojstvima vezanim uz funkcije.

Definicija 1. **Funkcija** $f : X \to Y$ je pridruživanje koje **svakom** elementu iz X pridruži **točno jedan** element iz Y.

Skup X zovemo *domena* funkcije f, a skup Y *kodomena*. Da bi funkcija bila određena moramo uvijek znati tri stvari: domenu, kodomenu i pravilo pridruživanja. *Pravilo pridruživanja* može biti izrečeno formulom, ali i ne mora. Tada se nekako drugačije opiše što je pridruženo kojem elementu domene.
Skup $y \in Y : f(x) = y, x \in X$ je skup svih vrijednosti koje f može poprimiti. Taj skup zovemo *slika funkcije* f i označavamo sa Im f.

Definicija 2. Neka je $f : X \to Y$ funkcija. Kažemo:
f je **injekcija** ako vrijedi $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
f je **surjekcija** ako za svaki $y \in Y$ postoji $x \in X$ takav da je $f(x) = y$. Dakle, ako su slika i kodomena isti skup.
f je **bijekcija** ako je i injekcija i surjekcija.

Primjer 1. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija zadana formulom $f(x) = x^2$. Ova funkcija nije injekcija jer je $f(2) = f(-2)$, ali $2 \neq -2$. Također nije surjekcija jer za npr. $-1 \in \mathbb{R}$ ne postoji takav $x \in \mathbb{R}$ da je $f(x) = -1$.
Primjer 2. Neka je $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty\rangle$ funkcija zadana formulom $f(x) = x^2$. Ova funkcija također nije injekcija, ali je surjekcija.
Primjer 3. Neka su $A = \{2, 4, 6, ...\} = 2\mathbb{N}$, $B = \{1, 3, 5, ...\} = 2\mathbb{N} - 1$ redom skup svih parnih prirodnih brojeva i skup svih neparnih prirodnih brojeva, a $f : A \to B$ funkcija zadana formulom $f(x) = x - 1$. Ova funkcija je bijekcija .

Definicija 3. Funkcija $f : X \to Y$ je:
parna ako vrijedi $f(-x) = f(x), \forall x \in X$.
neparna ako vrijedi $f(-x) = -f(x), \forall x \in X$.
periodična ako postoji $c \in X, c \neq 0$ takav da je $f(x) = f(x + c), \forall x \in X$.
ograničena odozgo ako postoji $M \in Y$ takav da je $f(x) \leq M, \forall x \in X$.
ograničena odozdo ako postoji $M \in Y$ takav da je $f(x) \geq M, \forall x \in X$.
rastuća ako vrijedi $x_1 \geq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2), \forall x_1, x_2 \in X$.
padajuća ako vrijedi $x_1 \geq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2), \forall x_1, x_2 \in X$.
monotona ako je padajuća ili rastuća.
strogo monotona ako u definiciji rastuće i padajuće funkcije vrijede strogo nejednakosti.
multiplikativna ako vrijedi $f(xy) = f(x)f(y), \forall x, y \in X$

Jedan od vrlo važnih pojmova u analizi je neprekidnost. Na razini srednje škole je bitno razumjeti da su neprekidne funkcije one 'čiji graf možemo nacrtati bez da dižemo olovku od papira'. Formalna definicija je malo kompliciranija, ali svejedno ću je navesti.

Definicija 4. Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval. Funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ je **neprekidna u točki** $c \in I$ ako $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in I, \exists \delta > 0$ takav da $|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

Definicija 5. Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval. Funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ je **neprekidna** ako je neprekidna u svakoj točki intervala I

Ono što je puno korisnije za rješavanje funkcionalnih jednadžbi su sljedeće činjenice.

Teorem 1. Ako je $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, onda za svaki konvergentan niz $(x_n)_n$ u I vrijedi $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to+\infty} x_n)$.

Teorem 2. Neka su $f : J \to \mathbb{R}, g : I \to J$ neprekidne funkcije. Tada je i $h := f \circ g : I \to \mathbb{R}$ također neprekidna. (Kažemo da je h *kompozicija* funkcija f i g i vrijedi $h(x) = f(g(x)), \forall x \in I$)

Teorem 3. Sve *elementarne funkcije* su neprekidne.
Elementarne funkcije su 'lijepe', svakom srednjoškolcu poznate funkcije: potencije, polinomi, racionalne, trigonometrijske, hiperbolne, eksponencijalne i logaritamske funkcije, te kompozicije tih funkcija.

Teorem 4. Za svaki $x \in \mathbb{R}$ postoji rastući (i padajući) niz racionalnih brojeva $(x_n)_n$ takav da je $\lim x_n = x$.
Dokaz je trivijalan ako znamo da se svaki realan broj može zapisati u decimalnom obliku. Tada rastući niz $(x_n)_n$ generiramo na primjer tako da je x_n broj dobiven uzimanjem samo prvih n mjesta iza decimalne točke u zapisu broja x.

Funkcionalne jednažbe najčešće rješavamo tako da uvrštavamo razne vrijednosti za x i y u jednadžbu i iz dobivenih identiteta otkrivamo svojstva koja tražena funkcija ima. Na taj način zapravo smanjujemo skup funkcija koje su potencijalno rješenje. Bitno je zamijetiti da se tim postupkom ne dokazuje da je neka funkcija zaista rješenje. Zato na kraju uvijek moramo provjeriti zadovoljava li zaista funkcija za koju mislimo da je rješenje sve uvjete iz zadatka.
Pri uvrštavanju moramo paziti smijemo li uvrstiti neki izraz koji bi željeli, npr. ako želimo uvrstiti $x = 5$ moramo provjeriti je li 5 u domeni funkcije f. Ako želimo uvrstiti x takav da vrijedi $f(x) = 5$ onda moramo znati nalazi li se 5 u slici funkcije 5, a ako želimo npr. $y = \frac{5}{f(x)-5}$ moramo biti siguran da je $f(x) \neq 5$.
Riješimo sada najpoznatiju funkcionalnu jednadžbu- *Cauchyevu.*

ZADATAK 1. Nađi sve neprekidne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje za sve $x, y \in \mathbb{R}$ zadovoljavaju jednadžbu $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Što ako ne znamo da je f neprekidna, ali znamo da je monotona?

Rješenje. Uvrstimo najprije $x = y = 0$. Dobivamo $f(0) = 0$.
Uvrstimo li $y = x$, dobit ćemo $f(2x) = 2f(x)$. Ovo izgleda kao zgodno svojstvo, a pojavljuje se $2x$. Pokušajmo sa $y = 2x$. Dobivamo $f(3x) = f(x) + f(2x) = 3f(x)$. Sada bismo mogli naslutiti da je $f(nx) = nf(x), \forall n \in \mathbb{N}$. Dokažite to indukcijom!
Primjetite da uvrštavanjem $x = 1$ dobijemo koliko je $f(n)$ za svaki prirodan broj n.
Pokušajmo dokazati da isto vrijedi za svaki racionalan broj $x = \frac{m}{n}$. Vrijedi $x \cdot n = m \cdot 1 \Rightarrow f(xn) = f(m \cdot 1)$. Kako su $n, m \in \mathbb{N}$ vrijedi $mf(1) = f(m) = f(nx) = nf(x) \Rightarrow f(x) = xf(1), \forall x \in \mathbb{Q}$.
Ostaje pokazati da je to također rješenje za $\forall x \in \mathbb{R}$. Ovdje će nam zatrebati ono što dosad još nismo koristili, f je neprekidna funkcija. Neka je x neki iracionalan broj. Želimo pokazati $f(x) = xf(1)$. Teorem 3 nam govori da postoji niz racionalnih brojeva $(x_n)_n$ takav da je $\lim x_n = x$. Sada prema teoremu 1 vrijedi $xf(1) = \lim_{n\to+\infty} x_n f(1) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to+\infty} x_n) = f(x)$.

Kako je x bio proizvoljan dokazali smo da rješenje početne jednadžbe mora biti oblika $f(x) = cx, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$.
Uvrstimo sad to u početnu jednažbu i vidimo da svaka takva funkcija zaista zadovoljava uvjete zadatka.
Ako f nije neprekidna, ali je monotona, onda opet možemo prijeći na skup $\mathbb{R}$. Opet koristimo teorem 3 da bismo dobili rastući niz $(r_n)_n$ i padajući niz $(R_n)_n$. Kako je f monotona vrijedi $cr_n = f(r_n) \leq f(x) \leq f(R_n) = cR_n$. Pređemo li na lim dobivamo $cx \leq f(x) \leq cx \Rightarrow f(x) = cx$ (ovo se naziva teorem o sendviču). I preostaje samo provjera. ✓

Ovo je standardan način dokazivanja. Među zadacima ima nekoliko koji se rješavaju na sličan način, a i onih koji se svode upravo na ovakvu jednadžbu prikladnom supstitucijom.

Zadatak 2. Nađi sve neprekidne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje za sve $x, y \in \mathbb{R}$ zadovoljavaju jednadžbu $f(x + y) = f(x)f(y)$

Rješenje. Ovo je vrlo sličan zadatak. Iskusniji natjecatelj bi trebao brzo vidjeti da je ovo svojstvo već vidio proučavajući neke funkcije u 3. razredu. Sve 'miriše' na eksponencijalnu funkciju. Pokušamo li s $f(x) = a^x$, lako ćemo se uvjeriti da je to zaista rješenje, no je li jedino?
Primjetimo da za $x = y = t/2$ dobivamo $f(t) = f(\frac{t}{2})^2 \geq 0$. Nadalje, ako je za neki x, $f(x) = 0$ onda je $f(x) = 0, \forall x$. Ovo je jedno rješenje. Promatrajmo sad jednadžbu uz uvjet $f(x) \neq 0, \forall x$.
Uočimo da sada jednadžbu smijemo logaritmirati. Dobivamo $\log_a \circ f(x+y) = \log_a \circ f(x) + \log_a \circ f(y)$.
Uvedimo supstituciju $g := log_a \circ f$. Tada je g neprekidna i vrijedi $g(x + y) = g(x) + g(y)$. Rješenje ove jednadžbe znamo, to je $g(x) = cx, c \in \mathbb{R}$.
Sada je rješenje početne jednadžbe dano sa $f(x) = a^x, a \in \mathbb{R}$ uz $f(x) = 0$. ✓

Zadatak 3. Nađi sve neprekidne funkcije $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ koje za sve $x, y > 0$ zadovoljavaju jednadžbu $f(xy) = f(x) + f(y)$

Rješenje. Ovu jednadžbu možemo također riješiti svođenjem na zadatak 1. Pazeći na domenu funkcije f, uvedimo supstituciju $g(x) = f(e^x)$. Dobivamo rješenje $f(x) = c \ln x, c \in \mathbb{R}$. ✓

Zadatak 4. (Izlučno natjecanje za Vojtech Jarnik 2003) Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje za sve $x, y \in \mathbb{R}$ neprekidne u 0 zadovoljavaju jednadžbu $f(x) - \frac{1}{2}f(\frac{x}{2}) = x^2$.

Rješenje. Uvrštavanjem $x = \frac{x}{2^n}$ i množenjem sa $\frac{1}{2^n}$ dobivamo

$$\frac{1}{2^n}f(\frac{x}{2^n}) - \frac{1}{2^{n+1}}f(\frac{x}{2^{n+1}}) = \frac{x^2}{2^{3n}}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sumiramo li sve jednakosti za $n = 1, 2, ...N - 1$ dobivamo

$$f(x) - \frac{1}{2^N}f(\frac{x}{2^N}) = x^2(1 + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{3N-3}}).$$

Prelaskom na $\lim_N$ i korištenjem neprekidnosti u 0 dobivamo

$$f(x) = x^2\frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{8}{7}x^2.$$

Neprekidnost u 0 nam je potrebna da bi postojao $\lim f(\frac{1}{2^N}) = f(\lim \frac{1}{2^n}) = f(0)$, kad taj limes ne bi postojao zadatak ne bismo mogli ovako riješiti. ✓

Vrlo dobri primjeri su zadaci navedeni na posebnom papiru pod 12-19. Zadatak 17. je jako dobar primjer jedne supstitucije, te kako dokazati da su jedina rješenje ona 'lijepa' iako nemamo neprekidnost kao uvjet. Zadaci 18. i 19. pokazuju gdje je korisno pokazivati *surjektivnost*. Pokažimo još kako se rekurzije koriste u određenom tipu funkcionalnih jednadžbi.

ZADATAK 5. (Shortlist 2002) Neka su a i b pozitivni realni brojevi. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takve da je $f(f(x)) = b(a+b)x - af(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}^+$.

Rješenje. Prvo primjetimo jednu činjenicu koja nam nije toliko bitna za rješenje ovog zadatka. Funkcija f je injekcija. Ovo ćemo pokazati jer to može biti korisno u nekim drugim zadacima. Procedura je uvijek ista. Pretpostavimo da za neke x_1, x_2 vrijedi $f(x_1) = f(x_2)$. Onda je i $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$, te $f(f(x_1)) + af(x_1) = f(f(x_2)) + af(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Dakle, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
U zadacima u kojima se pojavljuju *iteracije* funkcije, dakle $f(f(x)), f(f(f(x)))$ rješavaju se generiranjem niza $x_0 = x, x_n = f(x_{n-1})$. Ono što želimo je naći eksplicitnu formulu za x_n(to smo pokazali kako se radi kod nizova) i onda izraziti x_1 preko x. Vratimo se zadatku.
Uvrstimo x_n i dobivamo $x_{n+2} - ax_{n+1} - b(a+b) = 0$. Rješenja karakteristične jednadžbe su b i $-(a+b)$, pa ova rekurzija ima opće rješenje $x_n = \lambda b^n + \mu(-1)^n(a+b)^n$.
Ovdje je sada bitno da je kodomena funkcije $\mathbb{R}^+$. Dakle, x_n moraju biti svi pozitivni, ali iz općeg rješenja vidimo da će za $\mu \neq 0$ desna strana biti i pozitivna i negativna. Zato je $\mu = 0$.
Opće rješenje je $x_n = \lambda b^n$. Uvrštavanjem $x_0 = x$ dobivamo $x = \lambda$. Zato je $f(x) = x_1 = bx$ za neki $b \in \mathbb{R}^+$. Provjerom vidimo da je to zaista rješenje za svaki $b \in \mathbb{R}^+$. ✓

Funkcionalne jednadžbe-3^3 zadataka

Nađi sve neprekidne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje za sve $x, y \in \mathbb{R}$ zadovoljavaju jednadžbu:
1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Što ako ne znamo da je f neprekidna, ali znamo da je monotona?
2. $f(x + y) = f(x)f(y)$.
3. $f(xy) = f(x) + f(y)$, uz $x, y > 0$.
4. $f(x + y) = f(x) + f(y) - 5$.
5. $f(\frac{x+y}{2}) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$.
6. $f(x + y) + f(x - y) = 2[f(x) + f(y)]$.
7. $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)$.
8. $f(x + y) = \frac{f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}$.
9. $f(x + y)f(x - y) = [f(x)f(y)]^2$.
10. $f(x + y) = f(x) + f(y) + xy(x + y)$.
11. $f(x) - \frac{1}{2}f(\frac{x}{2}) = x^2$.

Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje za sve $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ zadovoljavaju jednadžbu:
12. $f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2$.
13. $(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz)$
14. $f(x + y) + f(y + z) + f(z + x) \geq 3f(x + 2y + 3z)$.
15. $f(x^4 + y) = x^3f(x) + f(f(y))$. Uz uvjet da je $f(x) = 0$ za konačno mnogo $x \in \mathbb{R}$.
16. $f(x^2 + y) + f(f(x) - y) = 2f(f(x)) + 2y^2$.
17. $f((f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4f(x)y$.
18. $f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x)$.
19. $f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$.

Ostali zadaci:
20. Za koje $\alpha \in \mathbb{R}$ postoji nekonstantna funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je $f(\alpha(x + y)) = f(x) + f(y)$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$.
21. Neka je S skup realnih brojeva većih od -1. Nađi sve $f : S \to S$ takve da je $f(x+f(y)+xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$ za sve $x, y \in S$ i $f(x)/x$ je strogo rastuće za $-1 < x < 0$ i $0 < x$.
22. Za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vrijedi $|f(x)| \leq 1$ i $f(x + \frac{13}{42}) + f(x) = f(x + \frac{1}{6}) + f(x + \frac{1}{7})$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Dokaži da je f periodična funkcija.
23. Neka je $\lambda \neq \pm 1$ realan broj., Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ takve da je $f(\ln x + \lambda \ln y) = g(\sqrt{x}) + g(\sqrt{y}), \forall x, y \in (0, \infty)$.

Iteracije:
24. Neka su a i b pozitivni realni brojevi. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takve da je $f(f(x)) = b(a + b)x - af(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}^+$.
25. Nađi sve monotone funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je $f(f(f(x))) - 3f(f(x)) + 6f(x) = 4x + 3$ za sve $x \in \mathbb{R}$.
26. Nađi sve neprekidne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je $f((f(x)) + f(x) = 2x + a$ za sve $x \in \mathbb{R}$ i fiksan $a \in \mathbb{R}$.
27. Nađi sve neprekidne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je $f(f(x)) = af(x)+bx$, gdje su $a, b \in (0, 1/2)$.

Funkcionalne jednadžbe-hintovi i rješenja

1.-3. Cauchyeve jednadžbe.
4. supstitucija $g(x) = f(x) - 5$.
5. Jensenova jednadžba. $y = 0 \Rightarrow f(\frac{x}{2}) = \frac{f(x)+f(0)}{2} \Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y) - f(0)$.
6. kao u 1. zadatku dokažemo $f(x) = ax^2$.
7. $f(nx) = nf(x) - (n-1)f(0)$, dokažemo $f(x) = ax + b$.
8. supstitucija $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.
9. možemo pp da je f nenegativna. $f(nx) = f(x)^{n^2}$, pa dobijemo rješenje $f(x) = a^{x^2}$.
10. $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3}$.
11. Izlučno natjecanje za Vojtech Jarnik 2003. $\frac{1}{2^n}f(\frac{x}{2^n}) - \frac{1}{2^{n+1}}f(\frac{x}{2^{n+1}}) = \frac{x^2}{2^{3n}}$, sumiramo i primjenimo lim.
12. IMO 1992. dokažemo $f(f(y)) = y$ i $f(x^2) = f(x)^2$, na kraju vidimo da slučajevi $f(x) > x$ i $f(x) < x$ vode na kontradikciju.
13. IMO 2002. ako je $f(0) = 1/2$, onda je $f(x) \equiv 0$. ako nije, onda je $f(0) = 0$. dokažemo da je f multiplikativna. ako je f(1)=0 onda je $f(x) \equiv 1$. ako nije, onda pokažemo da je f parna i da oba slučaja $f(x) > x^2$ ili $f(x) < x^2$ za neki x vode na kontradikciju.
14. dokažemo $f(x) \geq f(0)$ i $f(x) \leq f(0)$.
15. dokažemo $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, f je neparna, monotona i $f(x^4 + y) = f(x^4) + f(y)$.
16. uvrstimo $y = f(x) - x^2$.
17. Iran 1997. uvrstimo $y = (x^2 - f(x))/2$ pp da je $f(a) = 0$ za $a \neq 0$ i dobijemo $f(y) = f(a^2 + y)$. uvrstimo $y = a^2$ u početnu jednadžbu, te $y = 0$, pa dobijemo da je $f(x) = 0$ za sve x.
18. Shortlist 2002. uvrstimo $y = -f(x)$ i zaključimo da je f surjekcija. onda uvrstimo $x = a$ pri čemu je $f(a) = 0$. slijedi $f(x) = x - a$.
19. IMO 1999. Neka je $f(0) = c$, tada je $c \neq 0$ za $x \in \mathrm{Im}f =: A$ možemo uvrstiti $x = f(y)$ i dobivamo $f(x) = \frac{c+1}{2} - \frac{x^2}{2}$ za $x \in A$. Ključno je pokazati $A - A = \mathbb{R}$. To vrijedi jer je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana sa $g(x) = f(x - c) - f(x)$ surjekcija. Sada pokažemo $f(x) = c - \frac{x^2}{2}$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Uspoređivanjem dobivamo c=1.
20. za $\alpha \neq 1$ uvrstimo $y = \alpha x/(1 - \alpha)$.
21. IMO 1994. jednažba f(u)=u može imati najviše tri rješenja, jedno u $\langle -1, 0\rangle$, $u = 0$ i jedno u $\langle 0, +\infty\rangle$. takve točke se zovu fiksne točke. no stavljanjem x=y=u, samo $u = 0$ ne vodi na kontradikciju. Iz $f(x + (1+x)f(x)) = x + (1+x)f(x)$ slijedi $f(x) = -\frac{x}{x+1}$ za svaki x. ostaje provjera.
22. uvrštavamo za x redom $x + a, x + 2a, ..., x + 5a$ i sumiramo, te u dobivenu jedandžbu za x uvrštavamo $x + b, x + 2b, ..., x + 6b$ i sumiramo. dobivamo $f(x+2) - f(x+1) = f(x+1) - f(x) =: c$. indukcijom slijedi $f(x + n) - f(x) = nc$. Ako je $c \neq 0$ tada je $f(x + n)$ neograničena, što je kontradikcija s početnim uvjetom.
23. 360 Problems for Mathematical Contests. Uvrstimo $x = y$ i $y = x$ u početnu jednadžbu. Tada imamo dvije jednadžbe u koje uvedemo supstituciju $a = \ln x + \lambda \ln y$ i $b = \ln y + \lambda \ln x$. Dobivamo $f(a) = f(b) = g(e^{\frac{\lambda b - a}{2(\lambda^2-1)}}) + g(e^{\frac{\lambda a - b}{2(\lambda^2-1)}}), a, b \in \mathbb{R}$. Slijedi da je f konstanta, $f(x) = C$. Za $x = y$ slijedi $g(\sqrt{x}) = \frac{C}{2}$. Dakle $g(x) = C/2$.
24. Shortlist 1992. 25. The Gazeta Matematica Contest 1999. 26. Rumunjska 2002. 27. 360 Problems for Mathematical Contests.