

Singularna homologija

Ispit, 23. siječnja 2019.

1. Definirajte Hurewiczevo preslikavanje, pokažite da je dobro definirano i da je homomorfizam grupa. Iskažite Hurewiczev teorem i odredite $H_1(\mathbb{R}P^n)$. Napišite primjer acikličkog prostora koji ima netrivialnu fundamentalnu grupu.
2. Neka su $i: A \rightarrow B$ i $r: B \rightarrow A$ homomorfizmi Abelovih grupa takvi da vrijedi $ri = 1_A$. Dokažite da je grupa $\text{Im}(i) \oplus \text{Ker}(r)$ izomorfna grupi B .
3. (a) Neka su $f, g: C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ lančano homotopna preslikavanja lančanih kompleksa abelovih grupa. Dokažite da je $f_* = g_*: H_n(C) \rightarrow H_n(D)$ za svaki $n \geq 0$.
(b) Napišite glavne korake u dokazu homotopske invarijantnosti singularne homologije.
4. Dokažite lemu o Lebesgueovom broju.
5. Napišite Mayer-Vietorisov niz i opišite vezni homomorfizam. Dokažite egzaktnost niza na mjestu $H_n(X)$.
6. Za preslikavanje $f: S^n \rightarrow S^n$ kažemo da je *parno* ako vrijedi $f(-x) = f(x)$ za svaki $x \in S^n$. Dokažite da parna preslikavanja imaju paran stupanj i da je stupanj 0 ako je n paran broj. Uputa: koristite homologiju prostora $\mathbb{R}P^n$.

M. Bašić