

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Geofizički odsjek

Martin Lazar

Modeliranje termohalinog strujanja u okrajnim bazenima uz uvažavanje lateralnog trenja

Diplomski rad

Zagreb, prosinac 2003.

Predgovor

Cilj je ovog rada bio razviti model koji bi opisao gibanja koja se javljaju tijekom zimskih mjeseci u sjevernom Jadranu. Zbog izrazitih površinskih gubitaka topline i vlage u situacijama s burom, kao i dotoka vode u priobalnom području, u tom razdoblju dolazi do jakih promjena u polju gustoće. Pri tom se maksimum gustoće javlja u središnjem dijelu bazena. Posljedica toga je stvaranje termohaline cirkulacije sa silaznim strujanjima u području maksimalne gustoće, što se kompenzira uzlaznim strujanjima u priobalnom području.

Ovaj se rad nastavlja na već postojeće modele koje su izradili Orlić [O], Žuvela [Ž] i Pavić [P]. Zajedničko svim tim radovima je da pokušavaju modelirati gore opisanu situaciju zadržavajući se u okviru analitičkog rješenja modela. Orlić je razvio jednostavan konceptualni model za slučaj kad su površinski protoci vlage i topline lokalno uravnoteženi obalnim protocima. Model ispravno predviđa gradijent gustoće okomit na obalu s maksimumom u sredini bazena. Dobivena je termohalina cirkulacija koja ima silazni tok u većem dijelu bazena kompenziran uzlaznim tokom u pribalnom području. Javlja se i hidraulički tok usmjeren od obale prema površini mora, ali znatno slabijeg intenziteta, tako da je rezultirajuće polje dominantno određeno termohalinom cirkulacijom. Uslijed otklanjajućeg djelovanja Coriolisove sile javljaju se i dužobalne struje. Model predviđa površinsku ciklonalnu cirkulaciju, kao i pridnenu anticiklonalnu, koja je tek nedavno eksperimentalno ustanovljena (vidi [GCU])). Model je pokazao osjetljivost na izbor parametrizacije trenja (korištena je linearna parametrizacija).

Žuvela [Ž] je poboljšala model uvođenjem korektnije parametrizacije trenja, te zamjenom teoretskog izraza za uzgonsko forsiranje empirijskim izrazom za anomaliju gustoće u Jadranu. Model je predvidio termohalinu cirkulaciju sa silaznim strujanjima u većem dijelu bazena, te uzlaznim tokom u pribalju. Također je predviđena ciklonalna cirkulacija površinskog sloja, dok je izostalo pridneno anticiklonalno strujanje.

U Pavićevom radu [P] napravljeno je dodatno poboljšanje uvođenjem pridnenog trenja s ciljem dobivanja fizikalnijeg modela koji će bolje opisivati promatrane pojave. Rezultati se poklapaju s onima prethodnog modela [Ž].

U ovom radu napravljeno je dodatno poboljšanje uvođenjem lateralnog trenja. Kako bi sačuvali analitičnost rješenja, ograničili smo se na razmatranje hidrostatskog slučaja. Međutim, kao i u Pavićevom radu, moralo se primijeniti numeričko računanje određenih koeficijenata, te, također, zbog obimnosti teorijskog dijela modela, u rad nije uključen empirijski izraz za uzgonsko forsiranje, već je preuzet jedan teorijski izraz [O]. Kao i u prethodna dva rada, i ovdje je zanemareno hidrauličko forsiranje, jer izvorni model [O] predviđa da je hidraulički tok znatno slabijeg inteziteta od termohaline cirkulacije. Dobiveni rezultati potvrđuju osnovne osobine cirkulacije predviđene prethodnim dvama radovima, s time da otvaraju dodatan prostor za diskusiju ovisnosti rješenja o koeficijentu lateralnog trenja A_y .

Osnovne jednađbe, rubni uvjeti i pretpostavke modela navedeni su i opisani u prvom poglavlju. Uvodeći odgovarajuću parametrizaciju trenja, iz njih su izvedene jednađbe koje opisuju strujanje u bazenu. U drugom poglavlju određen je analitički izraz za strujnu funkciju, iz kojeg se zatim dobiva rješenje za dužobalno strujanje. Zbog složenosti, ono nije dato u analitičkom obliku, već se računa numeričkim metodama. Rezultati su prikazani u trećem poglavlju, gdje komentiram njihovu ovisnost o parametrima turbulentne izmjene impulsa A_z i A_y , kao i o vrijednostima koeficijenta pridnenog trenja k_z .

Pri izradi rada, analitički dio računa proveden je upotrebom programskog paketa Maple V, dok je za numerički dio, kao i za crtanje grafova, korišten programski paket Matlab 6.0.

Ovaj rad nastao je pod vodstvom prof. dr. sc. Mirka Orlića. Koristim priliku da mu se najljepše zahvalim na danim savjetima i potpori prilikom njegove izrade.

U Zagrebu, studenoga 2003.

Martin Lazar

Sadržaj

Predgovor	i
Sadržaj	iii
I. Model	
1. Osnovne jednačbe	2
2. Izvod jednačbe za strujnu funkciju	7
II. Rješenje	
1. Rješenje za strujnu funkciju	11
1.1. Rješenje prvog dijela	11
1.2. Rješenje drugog dijela	14
1.3. Rješenje trećeg dijela	16
1.4. Strujna funkcija	20
2. Rješenje za dužobalno strujanje	21
III. Rezultati	
1. Termohalina cirkulacija	23
2. Dužobalno strujanje	29
3. Zaključak	35
Literatura	37

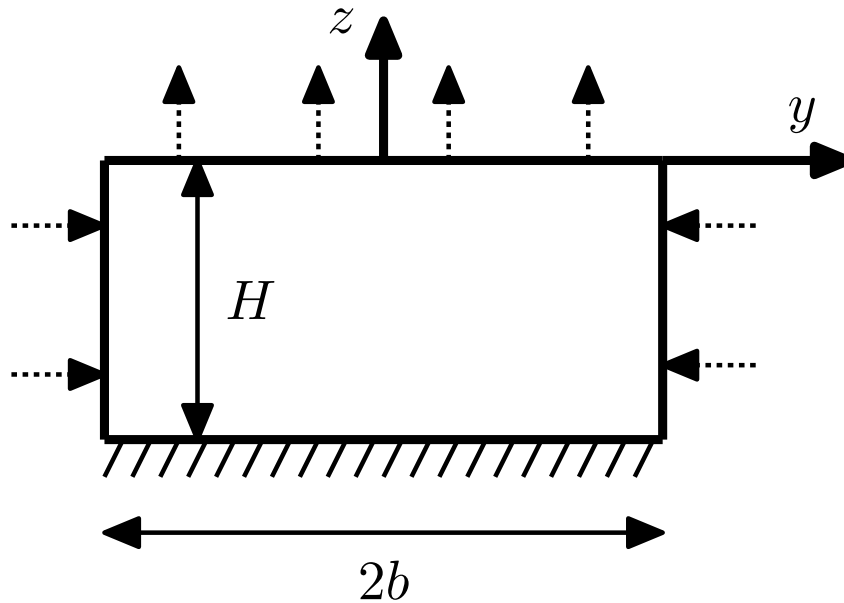
I. Model

1. Osnovne jednađbe

Promatramo pravokutni bazen širine $2b$ i dubine H (slika 1.), koji nam približno predstavlja poprečni presjek sjevernog Jadrana. Os x je položena u smjeru duž obale, os y okomito na obalu, a os z duž vertikale. Sjeverni Jadran aproksimiramo beskonačno izduženim kanalom, stoga možemo zanemariti promjene duž osi x . Pretpostavljamo da su tokovi topline i vlage na površini i dotok svježe vode duž obale prostorno i vremenski konstantni. Za stacionarno stanje vrijede jednađbe:

$$(1) \quad \begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - f(\mathbf{v} \times \mathbf{k}) &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \mathbf{F} \\ \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 \\ \rho &= \rho_0(1 - \alpha T + \beta S + \gamma p) \\ \mathbf{v} \cdot \nabla T &= \operatorname{div} (K \nabla \mathbf{v}) \\ \mathbf{v} \cdot \nabla S &= \operatorname{div} (M \nabla \mathbf{v}), \end{aligned}$$

gdje je $\mathbf{v} = (u, v, w)$ brzina, \mathbf{k} jedinični vektor u smjeru osi z , p tlak, ρ_0 referentna gustoća, T temperatura, S salinitet, f Coriolisov parametar, \mathbf{g} vektor sile teže, $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ vektor trenja, α, β i γ koeficijenti ekspanzije (kontrakcije), a K i M matrice, $K = \operatorname{diag}(0, K_y, K_z)$, $M = \operatorname{diag}(0, M_y, M_z)$, pri čemu su $K_i, M_i, i = y, z$ koeficijenti izmjene topline i soli. Jednađba stanja je linearizirana.



Slika 1. Presjek bazena

Raspisane po komponentama jednačbe (1) poprimaju sljedeći oblik:

$$(2) \quad \begin{aligned} v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - fv &= F_x \\ v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + fu &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + F_y \\ v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + F_z \\ v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= 0 \\ \rho &= \rho_0(1 - \alpha T + \beta S + \gamma p) \\ v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} &= K_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \\ v \frac{\partial S}{\partial y} + w \frac{\partial S}{\partial z} &= M_y \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + M_z \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Sve varijable mogu se prikazati kao zbroj srednjeg stanja kad nema vanjskih utjecaja i perturbacija koje su uzrokovane forsiranjem:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}' = \mathbf{v}' \\ p &= \bar{p} + p' \\ \rho &= \bar{\rho} + \rho' \\ T &= \bar{T} + T' \\ S &= \bar{S} + S'. \end{aligned}$$

Prema (2.5) slijedi

$$(3) \quad \begin{aligned} \bar{\rho} &= \rho_0(1 - \alpha \bar{T} + \beta \bar{S} + \gamma \bar{p}) \\ \rho' &= \rho_0(-\alpha T' + \beta S' + \gamma p'). \end{aligned}$$

Ako uzmemo u obzir da je $\rho_0 \approx 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, $\alpha = 2 \cdot 10^{-4} \text{ C}^{-1}$, $\beta = 8 \cdot 10^{-4} \text{ psu}^{-1}$, $\gamma = 4 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$, uz uobičajene vrijednosti temperature ($10 - 20^\circ \text{ C}$), saliniteta ($\approx 35 \text{ psu}$) i tlaka ($\approx 10^6 \text{ Pa}$), te da je $T' \ll \bar{T}$, $S' \ll \bar{S}$ i $p' \ll \bar{p}$, možemo, prema (3), smatrati da je $\rho' \ll \bar{\rho} \approx \rho_0$. Također, zbog toga što je član $\gamma \bar{p}$ ($\gamma p'$) za red (nekoliko redova) veličine manji od članova $\alpha \bar{T}$, $\beta \bar{S}$ ($\alpha T'$, $\beta S'$), možemo ga zanemariti u budućim razmatranjima.

Srednje stanje možemo opisati jednačbama

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \\ 0 &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - g \\ 0 &= K_y \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2} \\ 0 &= M_y \frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial y^2} + M_z \frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial z^2}, \end{aligned}$$

iz čega slijedi hidrostatska ravnoteža $\bar{p} = p_a - g\rho_0 z$, gdje je p_a atmosferski tlak, a \bar{T} i \bar{S} su konstante.

Perturbacije su opisane sljedećim jednadžbama:

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - fv = F_x \\
 & v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + fu = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y} + F_y \\
 & v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} + g\alpha T' - g\beta S' + F_z \\
 & -\alpha v \frac{\partial T'}{\partial y} + \beta v \frac{\partial S'}{\partial y} - \alpha w \frac{\partial T'}{\partial z} + \beta w \frac{\partial S'}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\
 & v \frac{\partial T'}{\partial y} + w \frac{\partial T'}{\partial z} = K_y \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 T'}{\partial z^2} \\
 & v \frac{\partial S'}{\partial y} + w \frac{\partial S'}{\partial z} = M_y \frac{\partial^2 S'}{\partial y^2} + M_z \frac{\partial^2 S'}{\partial z^2}.
 \end{aligned}$$

Primijetimo da je pri izvodu jednadžbe (4) korištena Boussinesqova aproksimacija, kao i hidrostatska ravnoteža za srednje stanje. Iz dimenzionalne analize slijedi da u jednadžbi (4.4) možemo zanemariti sve osim posljednja dva člana. Uz dodatnu pretpostavku $K_i = M_i = N_i, i = y, z$, te oznaku

$$\delta = -\rho_0(\alpha T' - \beta S')$$

posljednje dvije jednadžbe u gornjem sustavu možemo sažeti u jednu za anomaliju gustoće. Pri tom sustav prelazi u sljedeći:

$$\begin{aligned}
 & v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - fv = F_x \\
 & v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + fu = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y} + F_y \\
 & v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{g}{\rho_0} \delta + F_z \\
 & \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\
 & v \frac{\partial \delta}{\partial y} + w \frac{\partial \delta}{\partial z} = N_y \frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2} + N_z \frac{\partial^2 \delta}{\partial z^2}.
 \end{aligned}$$

Linearizacijom ovih jednadžbi dobivamo

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & -fv = F_x \\
 & fu = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y} + F_y \\
 & 0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{g}{\rho_0} \delta + F_z \\
 & \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\
 & 0 = N_y \frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2} + N_z \frac{\partial^2 \delta}{\partial z^2}.
 \end{aligned}$$

U ovom modelu želimo boljom parametrizacijom trenja odrediti utjecaj sile trenja na cirkulaciju u presjeku bzena, kao i na dužobalne struje. Sile trenja u općem slučaju imaju

oblik:

$$(6) \quad \begin{aligned} F_x &= A_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ F_y &= A_y \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + A_z \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ F_z &= A_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + A_z \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Koeficijenti trenja poprimaju vrijednosti $A_y = 10^2 - 10^5 \text{m}^2 \text{s}^{-1}$, te $A_z = 10^{-4} - 10^{-2} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$. Odnos lateralne i vertikalne komponente sile trenja može se odrediti iz omjera

$$\frac{A_y}{(2b)^2} : \frac{A_z}{H^2} = \left(\frac{H}{2b} \right)^2 \frac{A_y}{A_z}.$$

Budući da je referentni bazen za naš model sjeverni Jadran, čija duljina ($b \approx 10^5 \text{m}$) je znatno veća od dubine ($H \approx 10^2 \text{m}$), gornji omjer varira između 10^{-2} i 10^3 . To povlači da će o izboru koeficijenata A_y i A_z ovisiti da li je djelovanje lateralne komponente sile trenja zanemarivo u odnosu na vertikalnu.

Uvrstimo li izraze (6) u jednadžbe (5), naš sustav poprima sljedeći oblik

$$\begin{aligned} -fv &= A_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ fu &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y} + A_y \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + A_z \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ 0 &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{g}{\rho_0} \delta + A_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + A_z \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ 0 &= N_y \frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2} + N_z \frac{\partial^2 \delta}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Budući da gornji sustav nisam uspio riješiti analitički, u želji da sačuvamo analitičnost rješenja, morao sam se ograničiti na hidrostatski slučaj, odnosno, zanemariti članove $A_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ i $A_z \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$. Time, konačno, dobivamo sustav jednadžbi koje rješavamo:

$$(7) \quad \begin{aligned} -fv &= A_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ fu &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y} + A_y \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + A_z \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ 0 &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{g}{\rho_0} \delta \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ 0 &= N_y \frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2} + N_z \frac{\partial^2 \delta}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Laplaceova jednadžba za anomaliju gustoće (7.5) već je riješena u ranijem modelu [O], uz sljedeće rubne uvjete

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\delta}{\partial y}\right)_{-b} &= \frac{\rho_0 R}{N_y}(\alpha\Delta T + \beta S_0) \\ \left(\frac{\partial\delta}{\partial y}\right)_b &= -\frac{\rho_0 R}{N_y}(\alpha\Delta T + \beta S_0) \\ \left(\frac{\partial\delta}{\partial z}\right)_{-H} &= 0 \\ \left(\frac{\partial\delta}{\partial z}\right)_0 &= \frac{\rho_0}{N_z} \left(-\alpha \frac{Q_s}{\rho_0 c_p} + \beta S_0(E - P) \right). \end{aligned}$$

Pri tom je ΔT razlika između temperature riječne vode i mora, S_0 srednja vrijednost saliniteta, R označava riječni dotok, $E - P$ razliku isparavanja i oborine, Q_s je površinski tok topline prema moru, a c_p je specifična toplina pri konstantnom tlaku. Pretpostavljena je konstantna vrijednost parametra R duž vertikale, konstantna vrijednost parametra $E - P$ na površini, te da su protoci vlage i topline lokalno uravnoteženi, to jest, da je $(E - P)b = RH$ i $-\frac{Q_s}{\rho_0 c_p}b = R\Delta TH$. Izraz za anomaliju gustoće tada glasi

$$\delta(y, z) = \frac{\rho_0 R}{2b} (\alpha\Delta T + \beta S_0) \left(\frac{(z + H)^2}{N_z} - \frac{H^2}{3N_z} - \frac{y^2}{N_y} + \frac{b^2}{3N_y} \right).$$

Parcijalnom derivacijom gornjeg izraza dobijemo da je

$$\frac{\partial\delta}{\partial y} = -\frac{\rho_0 R}{bN_y} (\alpha\Delta T + \beta S_0) y,$$

što ćemo konciznije zapisivati kao

$$\frac{\partial\delta}{\partial y} = 2cy,$$

pri čemu je

$$(8) \quad c = -\frac{\rho_0 R}{2bN_y} (\alpha\Delta T + \beta S_0).$$

Na taj način sustav (7) prelazi u sljedeći sustav

$$(9) \quad \begin{aligned} -fv &= A_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ fu &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y} + A_y \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + A_z \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ 0 &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{g}{\rho_0} \delta \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \end{aligned}$$

s četiri nepoznanice (tri komponente brzine \mathbf{v} i tlak p). Eliminirajmo tlak iz gornjeg sustava tako da deriviramo jednadžbe (9.2) i (9.3) po z , odnosno, y i oduzmemo ih. Dobijemo

zatvoreni sustav za komponente brzine

$$(10) \quad \begin{aligned} -fv &= A_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ f \frac{\partial u}{\partial z} &= A_y \frac{\partial^3 v}{\partial z \partial y^2} + A_z \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} + \frac{g}{\rho_0} \frac{\delta \delta}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \end{aligned}$$

koji rješavamo uz rubne uvjete

$$(11) \quad \begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_0 &= \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_0 = 0 \\ A_z \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{-H} - k_z u_{-H} &= 0 \\ A_z \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_{-H} - k_z v_{-H} &= 0 \\ A_y \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{-b} - k_y u_{-b} &= 0 \\ A_y \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_b + k_y u_b &= 0 \\ w_{-H} = 0 &= w_0 = 0 \\ v_{-b} = v_b &= 0. \end{aligned}$$

Prva dva uvjeta proizlaze iz dinamičkog rubnog uvjeta. Na površini je smicanje jednako tangencijalnoj napetosti vjetra. Budući da pretpostavljamo da vjetra nema, smicanja su jednaka nuli. Rubni uvjeti (11.2)-(11.5) predstavljaju parametrizaciju smicanja strujanja u pridnenom (priobalnom) sloju, gdje je $k_z(k_y)$ koeficijent pridnenog (priobalnog) trenja. Preostali rubni uvjeti proizlaze iz uvjeta da nemamo tok kroz granice bazena. Analizom inercijalnih oscilacija procijenjen je raspon vrijednosti koeficijenata k_z i k_y u sjevernom Jadranu od 10^{-4}ms^{-1} do 10^{-2}ms^{-1} .

2. Izvod jednadžbe za strujnu funkciju

Jednadžba kontinuiteta omogućuje uvođenje strujne funkcije Ψ :

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \Psi}{\partial y}.$$

Uvrštavanjem u (10) imamo

$$(12) \quad \begin{aligned} f \frac{\partial \Psi}{\partial z} &= A_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ f \frac{\partial u}{\partial z} &= \left(-A_y \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2} - A_z \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right) \Psi + \frac{g}{\rho_0} \frac{\delta \delta}{\partial y}. \end{aligned}$$

Želimo izraziti član $\frac{\partial u}{\partial z}$ pomoću strujne funkcije Ψ i na taj način dobiti jednadžbu za strujnu funkciju. Stoga integrirajmo (12.1) po vertikali od proizvoljne dubine $z_0 \in [-H, 0]$ do površine, koristeći rubni uvjet (11.1) i pretpostavku da je $\Psi(0) = 0$. Dobijemo

$$-f\Psi = A_y \int_{z_0}^0 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - A_z \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Kako bi iskoristili rubne uvjete za smicanje strujanja u priobalnom sloju (11.4, 11.5), integrirajmo gornji izraz po transverzali:

$$\begin{aligned}\int_{-b}^b f\Psi dy &= -A_y \int_{z_0}^0 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_b - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{-b} \right) dz + \int_{-b}^b A_z \frac{\partial u}{\partial z} dy \\ &= k_y \int_{z_0}^0 (u_b + u_{-b}) dz + \int_{-b}^b A_z \frac{\partial u}{\partial z} dy.\end{aligned}$$

Uz pretpostavku da je $u_b + u_{-b} = 0$, odnosno da je dužobalno strujanje simetrično u odnosu na središte bazena, imamo

$$\int_{-b}^b f\Psi dy = \int_{-b}^b A_z \frac{\partial u}{\partial z} dy.$$

Kako bi mogli iskoristiti dobivenu relaciju, integrirajmo, također, jednadžbu (12.2) po transverzali i uvrstimo gornji izraz. Dobijemo da je

$$(13) \quad \int_{-b}^b \left(\left(A_y \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2} + A_z \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right) \Psi + \frac{f^2}{A_z} \Psi \right) dy = \int_{-b}^b \frac{g}{\rho_0} \frac{\delta \delta}{\partial y} dy.$$

Ovu jednadžbu ćemo rješavati uz pretpostavku da gornja funkcija zadovoljava jednakost po točkama, to jest da vrijedi

$$(14) \quad \left(A_y \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2} + A_z \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right) \Psi + \frac{f^2}{A_z} \Psi = \frac{g}{\rho_0} \frac{\delta \delta}{\partial y} = \frac{g}{\rho_0} 2cy,$$

gdje je konstanta c definirana izrazom (8). Na taj način smo dobili jednadžbu za strujnu funkciju Ψ koju rješavamo uz rubne uvjete

$$(15) \quad \begin{aligned}\Psi_{-b} &= \Psi_b = 0 \\ \Psi_{-H} &= \Psi_0 = 0 \\ \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right)_0 &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right)_{-H} - p_z \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)_{-H} &= 0,\end{aligned}$$

pri čemu je $p_z = k_z/A_z$. Navedeni rubni uvjeti proizlaze iz rubnih uvjeta za vertikalnu i transverzalnu brzinu (11).

Na kraju ovog poglavlja primijetimo da je zbog pretpostavke o simetričnosti dužobalnog strujanja u odnosu na središnjicu bazena iz jednadžbi, koje rješavamo, nestao faktor k_y , tako da on neće imati utjecaja na konačno rješenje. Također, kao posljedica eliminacije integrala u (13), slijedi da je

$$(16) \quad f\Psi = A_z \frac{\partial u}{\partial z},$$

odnosno,

$$f \frac{\partial \Psi}{\partial z} = A_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Usporedba dobivenog izraza s jednažbom (12.1) povlači da je

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

odnosno, da je dužobalno strujanje linearizirano po transversali. Na žalost, to je bila nužna pretpostavka kako bi mogli dobiti analitički rješivu jednažbu za strujnu funkciju.

II. Rješenje

1. Rješenje za strujnu funkciju

Rješenje jednadžbe

$$\left(A_y \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2} + A_z \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right) \Psi + \frac{f^2}{A_z} \Psi = \frac{g}{\rho_0} 2cy$$

može se rastaviti na homogeni i partikularni dio: $\Psi = \Psi_H + \Psi_P$. Lako se vidi da je partikularno rješenje oblika

$$\Psi_P = \frac{g}{\rho_0} \frac{A_z}{f^2} 2cy.$$

Homogeno rješenje mora zadovoljavati jednadžbu

$$\left(A_y \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2} + A_z \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right) \Psi_H + \frac{f^2}{A_z} \Psi_H = 0$$

uz rubne uvjete

$$\begin{aligned} \Psi_H(y = \pm b) &= \mp \frac{g}{\rho_0} \frac{A_z}{f^2} 2cb \\ \Psi_H(z = -H) &= -\frac{g}{\rho_0} \frac{A_z}{f^2} 2cy \\ \Psi_H(z = 0) &= -\frac{g}{\rho_0} \frac{A_z}{f^2} 2cy \\ \left(\frac{\partial^2 \Psi_H}{\partial z^2} \right)_0 &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2 \Psi_H}{\partial z^2} \right)_{-H} - p_z \left(\frac{\partial \Psi_H}{\partial z} \right)_{-H} &= 0. \end{aligned}$$

Problem rješavamo tako da rastavimo funkciju Ψ_H na tri dijela $\Psi_H = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3$, gdje svaki dio zadovoljava nehomogeni rubni uvjet na jednoj granici (posebno Ψ_3 na dvjema granicama), dok su ostali rubni uvjeti homogeni.

1.1. Rješenje prvog dijela

Rubni uvjet je različit od nule na dnu bazena, dok su ostali rubni uvjeti homogeni. Nepoznata funkcija Ψ_1 mora zadovoljavati jednadžbu

$$\left(A_y \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2} + A_z \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right) \Psi_1 + \frac{f^2}{A_z} \Psi_1 = 0$$

i rubne uvjete

$$\begin{aligned} \Psi_1(y = \pm b) &= 0 \\ \Psi_1(z = -H) &= -\frac{g}{\rho_0} \frac{A_z}{f^2} 2cy \\ \Psi_1(z = 0) &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2} \right)_0 &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2} \right)_{-H} - p_z \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial z} \right)_{-H} &= 0. \end{aligned}$$

Rješenje tražimo metodom separacije varijabli. Uvrštavanjem izraza $\Psi_1(y, z) = Y(y)Z(z)$ u jednadžbu dobijemo

$$A_y Y'' Z'' + A_z Y Z^{IV} + \frac{f^2}{A_z} Y Z = 0,$$

odnosno, nakon dijeljenja s faktorom $A_y Y Z''$,

$$\frac{Y''}{Y} = -\frac{A_z}{A_y} \frac{Z^{IV}}{Z''} - \frac{f^2}{A_z A_y} \frac{Z}{Z''} = \lambda.$$

Rješenje za Y komponentu mora zadovoljavati jednadžbu

$$Y'' - \lambda Y = 0$$

i rubne uvjete

$$Y(\pm b) = 0.$$

Rješenje tražimo u obliku

$$Y(y) \sim e^{\nu y},$$

iz čega slijedi da je $\nu = \pm\sqrt{\lambda}$, pa rješenje poprima oblik

$$Y = a_1 e^{\sqrt{\lambda}y} + a_2 e^{-\sqrt{\lambda}y}.$$

Iz rubnih uvjeta proizlazi da je $a_1 = -a_2$ i $\sin(\sqrt{-\lambda}b) = 0$, odnosno da je $\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{b^2}$, $n \in \mathbf{N}$. Na taj način smo dobili da je

$$Y(y) = \sum_n Y_n(y) = \sum_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right).$$

Funkcija Ψ_1 sada ima oblik reda $\Psi_1(y, z) = \sum_n Y_n(y)Z_n(z)$, a nehomogeni rubni uvjet glasi

$$\Psi_1(y, -H) = \sum_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)Z_n(-H) = -\frac{g}{\rho_0} \frac{A_z}{f^2} 2cy.$$

Skup funkcija $\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$ je ortogonalan obzirom na skalarni produkt $\langle f | g \rangle \rightarrow \int_{-b}^b fg dy$. Stoga pomnožimo prethodni izraz sa $\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$ i integrirajmo ga od $-b$ do b . Na taj način dobijemo pridneni rubni uvjet za Z_n

$$Z_n(-H) = D_n := \frac{g}{\rho_0} \frac{A_z}{f^2} 4c \frac{b}{n\pi} (-1)^n.$$

Rubna zadaća za Z_n sada glasi

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{A_z}{A_y} Z_n^{IV} + \lambda_n Z_n'' + \frac{f^2}{A_z A_y} Z_n = 0 \\ Z_n(0) = 0 \\ Z_n(-H) = D_n \\ Z_n''(-H) - p_z Z_n'(-H) = 0 \\ Z_n''(0) = 0. \end{array} \right.$$

Pretpostavljamo da je rješenje oblika

$$Z_n(z) \sim e^{\omega_n z}.$$

Rješavanjem karakteristične jednadžbe dobijemo

$$\begin{aligned}\omega_{1n} &= \sqrt{-\frac{A_y \lambda_n}{A_z} \frac{1}{2} - \sqrt{\left(\frac{A_y}{A_z}\right)^2 \frac{\lambda_n^2}{4} - \frac{f^2}{A_z^2}}}, & \omega_{2n} &= \sqrt{-\frac{A_y \lambda_n}{A_z} \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{A_y}{A_z}\right)^2 \frac{\lambda_n^2}{4} - \frac{f^2}{A_z^2}}}, \\ \omega_{3n} &= -\sqrt{-\frac{A_y \lambda_n}{A_z} \frac{1}{2} - \sqrt{\left(\frac{A_y}{A_z}\right)^2 \frac{\lambda_n^2}{4} - \frac{f^2}{A_z^2}}}, & \omega_{4n} &= -\sqrt{-\frac{A_y \lambda_n}{A_z} \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{A_y}{A_z}\right)^2 \frac{\lambda_n^2}{4} - \frac{f^2}{A_z^2}}}, \\ & \omega_{1n} = -\omega_{3n}, & \omega_{2n} &= -\omega_{4n},\end{aligned}$$

iz čega proizlazi da je rješenje oblika

$$Z_n(z) = c_{1n}e^{\omega_{1n}z} + c_{2n}e^{\omega_{2n}z} + c_{3n}e^{\omega_{3n}z} + c_{4n}e^{\omega_{4n}z}.$$

Konstante $c_i, i = 1, \dots, 4$ određujemo uvrštavanjem rubnih uvjeta u gornji izraz za Z_n . Dobijemo sljedeći sustav jednadžbi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ e^{-\omega_{1n}H} & e^{-\omega_{2n}H} & e^{\omega_{1n}H} & e^{\omega_{2n}H} & D_n \\ \omega_{1n}^2 & \omega_{2n}^2 & \omega_{1n}^2 & \omega_{2n}^2 & 0 \\ (\omega_{1n}^2 - p_z \omega_{1n})e^{-\omega_{1n}H} & (\omega_{2n}^2 - p_z \omega_{2n})e^{-\omega_{2n}H} & (\omega_{1n}^2 + p_z \omega_{1n})e^{\omega_{1n}H} & (\omega_{2n}^2 + p_z \omega_{2n})e^{\omega_{2n}H} & 0 \end{bmatrix}$$

Rješavanjem sustava dobije se da su tražene konstante

$$\begin{aligned}c_{1n} &= -\frac{D_n}{2} \frac{E_n}{E_n \operatorname{sh}(\omega_{1n}H) - F_n \operatorname{sh}(\omega_{2n}H)} \\ c_{2n} &= \frac{D_n}{2} \frac{E_n}{E_n \operatorname{sh}(\omega_{1n}H) - F_n \operatorname{sh}(\omega_{2n}H)} \\ c_{3n} &= -c_{1n} \\ c_{4n} &= -c_{2n},\end{aligned}$$

pri čemu je

$$E_n = p_z \omega_{2n} \operatorname{ch}(\omega_{2n}H) + \omega_{2n}^2 \operatorname{sh}(\omega_{2n}H), \quad F_n = p_z \omega_{1n} \operatorname{ch}(\omega_{1n}H) + \omega_{1n}^2 \operatorname{sh}(\omega_{1n}H).$$

Tražena funkcija Z_n poprima oblik

$$\begin{aligned}Z_n(z) &= c_{1n}e^{\omega_{1n}z} + c_{2n}e^{\omega_{2n}z} - c_{1n}e^{-\omega_{1n}z} - c_{2n}e^{-\omega_{2n}z} \\ &= 2(c_{1n} \operatorname{sh}(\omega_{1n}z) + c_{2n} \operatorname{sh}(\omega_{2n}z)) \\ &= \frac{D_n}{E_n \operatorname{sh}(\omega_{1n}H) - F_n \operatorname{sh}(\omega_{2n}H)} (F_n \operatorname{sh}(\omega_{2n}z) - E_n \operatorname{sh}(\omega_{1n}z)).\end{aligned}$$

Time smo dobili izraz za prvi dio strujne funkcije Ψ_1 :

$$\Psi_1(y, z) = \sum_n \frac{D_n}{E_n \operatorname{sh}(\omega_{1n}H) - F_n \operatorname{sh}(\omega_{2n}H)} (F_n \operatorname{sh}(\omega_{2n}z) - E_n \operatorname{sh}(\omega_{1n}z)) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right).$$

1.2. Rješenje drugog dijela

Rubni uvjet je različit od nule na površini, dok su osatli rubni uvjeti homogeni. Rješavamo jednadžbu

$$\left(A_y \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2} + A_z \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right) \Psi_2 + \frac{f^2}{A_z} \Psi_2 = 0$$

uz rubne uvjete

$$\Psi_2(y = \pm b) = 0$$

$$\Psi_2(z = -H) = -\frac{g}{\rho_0} \frac{A_z}{f^2} 2cy$$

$$\Psi_2(z = 0) = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial z^2} \right)_0 = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial z^2} \right)_{-H} - p_z \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial z} \right)_{-H} = 0.$$

Nakon separacije varijabli $\Psi_2(y, z) = Y(y)Z(z)$, jednadžba poprima oblik

$$\frac{Y''}{Y} = -\frac{A_z}{A_y} \frac{Z^{IV}}{Z''} - \frac{f^2}{A_z A_y} \frac{Z}{Z''} = \kappa.$$

Y komponenta zadovoljava jednadžbu

$$Y'' - \kappa Y = 0$$

i rubne uvjete

$$Y(\pm b) = 0.$$

Budući da je problem isti kao i u prethodnom odjeljku, rješenje je

$$Y(y) = \sum_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right),$$

pri čemu je

$$\kappa_n = \lambda_n = -\frac{n^2 \pi^2}{b^2}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Nehomogeni rubni uvjet glasi

$$\Psi_2(y, 0) = \sum_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) Z_n(0) = -\frac{g}{\rho_0} \frac{A_z}{f^2} 2cy.$$

Množenjem gornjeg izraza sa $\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$ i integriranjem od $-b$ do b dobijemo da je

$$Z_n(-H) = D_n,$$

pri čemu je konstanta D_n ista kao i u prethodnom slučaju. Zadaća za komponentu Z_n je sljedeća

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{A_z}{A_y} Z_n^{IV} + \lambda_n Z_n'' + \frac{f^2}{A_z A_y} Z_n = 0 \\ Z_n(0) = D_n \\ Z_n(-H) = 0 \\ Z_n''(-H) - p_z Z_n'(-H) = 0 \\ Z_n''(0) = 0. \end{array} \right.$$

Rješenje tražimo u obliku

$$(1) \quad Z_n(z) = d_{1n}e^{\omega_{1n}z} + d_{2n}e^{\omega_{2n}z} + d_{3n}e^{\omega_{3n}z} + d_{4n}e^{\omega_{4n}z},$$

gdje su konstante $\omega_i, i = 1, \dots, 4$ iste kao i u prvom dijelu. Uvrštavanjem rubnih uvjeta dobijemo sljedeći sustav za nepoznanice $d_i, i = 1, \dots, 4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & D_n \\ e^{-\omega_{1n}H} & e^{-\omega_{2n}H} & e^{\omega_{1n}H} & e^{\omega_{2n}H} & 0 \\ \omega_{1n}^2 & \omega_{2n}^2 & \omega_{1n}^2 & \omega_{2n}^2 & 0 \\ (\omega_{1n}^2 - p_z\omega_{1n})e^{-\omega_{1n}H} & (\omega_{2n}^2 - p_z\omega_{2n})e^{-\omega_{2n}H} & (\omega_{1n}^2 + p_z\omega_{1n})e^{\omega_{1n}H} & (\omega_{2n}^2 + p_z\omega_{2n})e^{\omega_{2n}H} & 0 \end{bmatrix}$$

Tražene konstante su

$$\begin{aligned} d_{1n} &= \frac{D_n\omega_{2n}}{4(\omega_{1n}^2 - \omega_{2n}^2)(E_n\text{sh}(\omega_{1n}H) - F_n\text{sh}(\omega_{2n}H))} \left(\omega_{2n}(\omega_{1n} - \omega_{2n})(\omega_{1n} + \omega_{2n} + p_z) \right. \\ &\quad \left. e^{(\omega_{1n} + \omega_{2n})H} + 2p_z\omega_{1n}^2 + \omega_{2n}(\omega_{1n} + \omega_{2n})(-\omega_{1n} + \omega_{2n} - p_z)e^{(\omega_{1n} - \omega_{2n})H} \right) \\ d_{2n} &= \frac{D_n\omega_{1n}}{4(\omega_{1n}^2 - \omega_{2n}^2)(E_n\text{sh}(\omega_{1n}H) - F_n\text{sh}(\omega_{2n}H))} \left(\omega_{1n}(-\omega_{1n} + \omega_{2n})(\omega_{1n} + \omega_{2n} + p_z) \right. \\ &\quad \left. e^{(\omega_{1n} + \omega_{2n})H} + 2p_z\omega_{2n}^2 + \omega_{1n}(\omega_{1n} + \omega_{2n})(\omega_{1n} - \omega_{2n} - p_z)e^{(-\omega_{1n} + \omega_{2n})H} \right) \\ d_{3n} &= \frac{D_n\omega_{2n}}{4(\omega_{1n}^2 - \omega_{2n}^2)(E_n\text{sh}(\omega_{1n}H) - F_n\text{sh}(\omega_{2n}H))} \left(\omega_{2n}(\omega_{1n} - \omega_{2n})(\omega_{1n} + \omega_{2n} - p_z) \right. \\ &\quad \left. e^{-(\omega_{1n} + \omega_{2n})H} - 2p_z\omega_{1n}^2 + \omega_{2n}(\omega_{1n} + \omega_{2n})(-\omega_{1n} + \omega_{2n} + p_z)e^{(-\omega_{1n} + \omega_{2n})H} \right) \\ d_{4n} &= \frac{D_n\omega_{1n}}{4(\omega_{1n}^2 - \omega_{2n}^2)(E_n\text{sh}(\omega_{1n}H) - F_n\text{sh}(\omega_{2n}H))} \left(\omega_{1n}(-\omega_{1n} + \omega_{2n})(\omega_{1n} + \omega_{2n} - p_z) \right. \\ &\quad \left. e^{-(\omega_{1n} + \omega_{2n})H} - 2p_z\omega_{2n}^2 + \omega_{1n}(\omega_{1n} + \omega_{2n})(\omega_{1n} - \omega_{2n} + p_z)e^{(\omega_{1n} - \omega_{2n})H} \right), \end{aligned}$$

pri čemu su konstante E_n i F_n jednake kao u prvom dijelu.

Uvrštavanjem dobivenih konstanti u izraz za komponentu Z_n (1) dobivamo

$$\begin{aligned} Z_n(z) &= \frac{D_n}{(\omega_{1n}^2 - \omega_{2n}^2)(E_n\text{sh}(\omega_{1n}H) - F_n\text{sh}(\omega_{2n}H))} \left(p_z\omega_{2n}^2\omega_{1n}\text{sh}(\omega_{2n}H)\text{ch}(\omega_{1n}(z + H)) \right. \\ &\quad + p_z\omega_{1n}^2\omega_{2n}\text{sh}(\omega_{1n}H)\text{ch}(\omega_{2n}(z + H)) + \omega_{1n}^2(-F_n + \omega_{2n}^2\text{sh}(\omega_{1n}H))\text{sh}(\omega_{2n}(z + H)) \\ &\quad \left. + \omega_{2n}^2(-E_n + \omega_{1n}^2\text{sh}(\omega_{2n}H))\text{sh}(\omega_{1n}(z + H)) + p_z\omega_{2n}^2\omega_{1n}\text{sh}(\omega_{2n}z) + p_z\omega_{1n}^2\omega_{2n}\text{sh}(\omega_{1n}z) \right). \end{aligned}$$

Tražena funkcija dana je izrazom

$$\begin{aligned} \Psi_2(y, z) = \sum_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \frac{D_n}{(\omega_{1n}^2 - \omega_{2n}^2) (E_n \text{sh}(\omega_{1n}H) - F_n \text{sh}(\omega_{2n}H))} \\ \left(p_z \omega_{2n}^2 \omega_{1n} \text{sh}(\omega_{2n}H) \text{ch}(\omega_{1n}(z+H)) + p_z \omega_{1n}^2 \omega_{2n} \text{sh}(\omega_{1n}H) \text{ch}(\omega_{2n}(z+H)) \right) \\ + \omega_{1n}^2 (-F_n + \omega_{2n}^2 \text{sh}(\omega_{1n}H)) \text{sh}(\omega_{2n}(z+H)) + p_z \omega_{1n}^2 \omega_{2n} \text{sh}(\omega_{1n}z) \\ + \omega_{2n}^2 (-E_n + \omega_{1n}^2 \text{sh}(\omega_{2n}H)) \text{sh}(\omega_{1n}(z+H)) + p_z \omega_{2n}^2 \omega_{1n} \text{sh}(\omega_{2n}z) \end{aligned}$$

1.3. Rješenje trećeg dijela

Pri rješavanju zadaće za funkciju Ψ_3 pretpostavljamo da je rubni uvjet različit od nule na rubovima bazena (i lijevom i desnom). Rješavamo jednadžbu

$$\left(A_y \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2} + A_z \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right) \Psi_3 + \frac{f^2}{A_z} \Psi_3 = 0$$

uz rubne uvjete

$$\begin{aligned} \Psi_3(y = \pm b) &= \mp \frac{g}{\rho_0} \frac{A_z}{f^2} 2cb \\ \Psi_3(z = -H) &= 0 \\ \Psi_3(z = 0) &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial z^2} \right)_0 &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial z^2} \right)_{-H} - p_z \left(\frac{\partial \Psi_3}{\partial z} \right)_{-H} &= 0. \end{aligned}$$

Nakon separacije varijabli $\Psi_2(y, z) = Y(y)Z(z)$, jednadžba poprima oblik

$$\frac{Y''}{Y} = -\frac{A_z}{A_y} \frac{Z^{IV}}{Z''} - \frac{f^2}{A_z A_y} \frac{Z}{Z''} = \mu.$$

Budući da je u ovom slučaju homogena zadaća za Z komponentu, rješavamo najprije nju, ne bi li pomoću nje odredili nepoznate koeficijente μ . Ona glasi

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{A_z}{A_y} Z^{IV} + \mu Z'' + \frac{f^2}{A_z A_y} Z = 0 \\ Z(0) = 0 \\ Z(-H) = 0 \\ Z''(-H) - p_z Z'(-H) = 0 \\ Z''(0) = 0. \end{array} \right.$$

Pretpostavljamo da je traženo rješenje oblika

$$(2) \quad Z(z) = g_1 e^{\sigma_1 z} + g_2 e^{\sigma_2 z} + g_3 e^{\sigma_3 z} + g_4 e^{\sigma_4 z}.$$

Uvrštavanjem u jednadžbu dobijemo bikvadratnu jednadžbu čiji korijeni su

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sqrt{-\frac{A_y \mu}{A_z} \frac{\mu}{2} - \sqrt{\left(\frac{A_y}{A_z}\right)^2 \frac{\mu^2}{4} - \frac{f^2}{A_z^2}}}, & \sigma_2 &= \sqrt{-\frac{A_y \mu}{A_z} \frac{\mu}{2} + \sqrt{\left(\frac{A_y}{A_z}\right)^2 \frac{\mu^2}{4} - \frac{f^2}{A_z^2}}}, \\ \sigma_3 &= -\sqrt{-\frac{A_y \mu}{A_z} \frac{\mu}{2} - \sqrt{\left(\frac{A_y}{A_z}\right)^2 \frac{\mu^2}{4} - \frac{f^2}{A_z^2}}}, & \sigma_4 &= -\sqrt{-\frac{A_y \mu}{A_z} \frac{\mu}{2} + \sqrt{\left(\frac{A_y}{A_z}\right)^2 \frac{\mu^2}{4} - \frac{f^2}{A_z^2}}}, \\ & & \sigma_1 &= -\sigma_3, & \sigma_2 &= -\sigma_4,\end{aligned}$$

pri čemu je koeficijent μ još nepoznat. Primjenom Viète-ovih formula, koje povezuju korijene jednadžbe i njene koeficijente, imamo

$$(3) \quad \begin{aligned}-(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) &= \mu \frac{A_y}{A_z} \\ \sigma_1 \sigma_2 &= \frac{f}{A_z}.\end{aligned}$$

Korištenjem rubnih uvjeta dobije se sustav jednadžbi za koeficijente $g_i, i = 1, \dots, 4$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \left| 0 \right. \\ e^{-\sigma_1 H} & e^{-\sigma_2 H} & e^{\sigma_1 H} & e^{\sigma_2 H} & \left| 0 \right. \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \left| 0 \right. \\ (\sigma_1^2 - p_z \sigma_1) e^{-\sigma_1 H} & (\sigma_2^2 - p_z \sigma_2) e^{-\sigma_2 H} & (\sigma_1^2 + p_z \sigma_1) e^{\sigma_1 H} & (\sigma_2^2 + p_z \sigma_2) e^{\sigma_2 H} & \left| 0 \right. \end{bmatrix}.$$

Primjenom Gaussove metode eliminacije sustav svodimo na

$$(4) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \left| 0 \right. \\ 0 & \sigma_2^2 - \sigma_1^2 & 0 & \sigma_2^2 - \sigma_1^2 & \left| 0 \right. \\ 0 & 0 & 2\text{sh}(\sigma_1 H) & 2\text{sh}(\sigma_2 H) & \left| 0 \right. \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\text{sh}(\sigma_1 H) \tilde{E} - \text{sh}(\sigma_2 H) \tilde{F}}{\text{sh}(\sigma_1 H)} & \left| 0 \right. \end{bmatrix}.$$

Konstante \tilde{E} i \tilde{F} dane su izrazima

$$\tilde{E} = p_z \sigma_2 \text{ch}(\sigma_2 H) + \sigma_2^2 \text{sh}(\sigma_2 H), \quad \tilde{F} = p_z \sigma_1 \text{ch}(\sigma_1 H) + \sigma_1^2 \text{sh}(\sigma_1 H).$$

Nužan uvjet da bi sustav jednadžbi za koeficijente $g_i, i = 1, \dots, 4$ imao netrivialno rješenje je

$$\frac{\text{sh}(\sigma_1 H) \tilde{E} - \text{sh}(\sigma_2 H) \tilde{F}}{\text{sh}(\sigma_1 H)} = 0.$$

Iz tog uvjeta odredit ćemo nepoznatu konstantu μ .

Raspisivanjem gornjeg izraza nužan uvjet prelazi u

$$\text{sh}(\sigma_2 H) (p_z \sigma_2 \text{cth}(\sigma_2 H) + \sigma_2^2 - p_z \sigma_1 \text{cth}(\sigma_1 H) - \sigma_1^2) = 0,$$

koji zbog pozitivnosti funkcije sinus hiperbolni prelazi u

$$(5) \quad (p_z \sigma_2 \text{cth}(\sigma_2 H) + \sigma_2^2 - p_z \sigma_1 \text{cth}(\sigma_1 H) - \sigma_1^2) = 0.$$

Uz pretpostavku da su rješenja prethodne jednadžbe, σ_1 i σ_2 , iz skupa kompleksnih brojeva i korištenjem izraza (3), možemo pisati

$$(6) \quad \begin{aligned} \sigma_2 &= a + ib \\ \sigma_1 &= \frac{\frac{f}{A_z}}{a^2 + b^2}(a - ib). \end{aligned}$$

Uvrštavanjem gornjih izraza u (5) i izjednačavanjem realnog i imaginarnog dijela s nulom, dobijemo da je $a = 0$ i da imaginarni dio korijena σ_2 zadovoljava izraz

$$\left(b^2 - \left(\frac{f}{A_z b}\right)^2\right) - p_z \left(b \cot(bH) - \frac{f}{A_z b} \cot\left(\frac{Hf}{bA_z}\right)\right) = 0.$$

Korištenjem pokrata

$$K = \frac{f^2}{A_z^2}, \quad \tilde{b} = \frac{\sqrt[4]{K}}{b}$$

dobijemo

$$(7) \quad \left(\left(\sqrt[4]{KH\tilde{b}}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt[4]{KH}}{\tilde{b}}\right)^2\right) - pH \left(\sqrt[4]{KH\tilde{b}} \cot\left(\sqrt[4]{KH\tilde{b}}\right) - \frac{\sqrt[4]{KH}}{\tilde{b}} \cot\left(\frac{\sqrt[4]{KH}}{\tilde{b}}\right)\right) = 0.$$

Definirajmo funkciju

$$f(\tilde{b}) = \left(\sqrt[4]{KH\tilde{b}}\right)^2 - pH \sqrt[4]{KH\tilde{b}} \cot\left(\sqrt[4]{KH\tilde{b}}\right).$$

Jednadžba (7), koja je ujedno i uvjet za postojanje netrivialnog rješenja, poprima oblik

$$(8) \quad f(\tilde{b}) - f\left(\frac{1}{\tilde{b}}\right) = 0.$$

Jednadžba (8) ne može se riješiti analitički, stoga su njene nultočke određene numeričkim metodama. Na taj način se dobila prebrojiva familija korijena $\tilde{b}_n, n \in \mathbf{N}$, pomoću kojih ćemo odrediti nepoznate konstante μ_n . Koristeći da je $a_n = 0$ i $b_n = \sqrt[4]{K\tilde{b}_n}$, relacije (6) poprimaju oblik

$$\begin{aligned} \sigma_{2n} &= i\sqrt[4]{K\tilde{b}_n} \\ \sigma_{1n} &= -i\frac{\sqrt[4]{K}}{\tilde{b}_n}. \end{aligned}$$

Na osnovu Viète-ovih formula (3) slijedi da je

$$\mu_n = \sqrt{K} \frac{A_z}{A_y} \left(\tilde{b}_n^2 + \frac{1}{\tilde{b}_n^2}\right).$$

Daljnijim rješavanjem sustava (4) dobijemo da je

$$\begin{aligned} g_{1n} &= -g_{3n} \\ g_{2n} &= -g_{4n} \\ g_{1n} &= g_{4n} \frac{\text{sh}(\sigma_{2n}H)}{\text{sh}(\sigma_{1n}H)}. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem tih izraza u (2) dobijemo da je rješenje za komponentu Z_n

$$Z_n = \frac{\text{sh}(\sigma_{2n}H)}{\text{sh}(\sigma_{1n}H)} \left(\sin \left(\frac{\sqrt[4]{K}H}{\tilde{b}_n} \right) \sin \left(\sqrt[4]{K}\tilde{b}_nz \right) - \sin \left(\sqrt[4]{K}\tilde{b}_nH \right) \sin \left(\frac{\sqrt[4]{K}}{\tilde{b}_n} z \right) \right).$$

Uz oznaku

$$N_n = \sqrt{\int_{-H}^0 |Z_n(z)|^2 dz},$$

imamo da su funkcije dobivene normiranjem skupa funkcija Z_n , koje ćemo radi jednostavnosti označavati jednako, dane izrazom

$$Z_n = \frac{1}{N_n} \left(\sin \left(\frac{\sqrt[4]{K}H}{\tilde{b}_n} \right) \sin \left(\sqrt[4]{K}\tilde{b}_nz \right) - \sin \left(\sqrt[4]{K}\tilde{b}_nH \right) \sin \left(\frac{\sqrt[4]{K}}{\tilde{b}_n} z \right) \right).$$

Preostaje nam naći rješenje za Y komponentu. Nehomogeni rubni uvjet glasi

$$\Psi_3(\pm b, z) = \sum_n Y_n(\pm b) Z_n(z) = \mp \frac{g}{\rho_0} \frac{A_z}{f^2} 2cb.$$

Skup funkcija Z_n je ortogonalan na svoju drugu derivaciju (obzirom na skalarni produkt $\langle f | g \rangle = \int_{-H}^0 fg dz$). Stoga množenjem prethodnog izraza sa $Z_n''(z)$ i integracijom po varijabli z od $-H$ do 0 , dobijemo da su rubni uvjeti za Y_n

$$Y_n(\pm b) = \pm L_n := \mp \frac{\frac{g}{\rho_0} \frac{A_z}{f^2} 2cb \int_{-H}^0 Z_n''(z) dz}{\int_{-H}^0 Z_n''(z) Z_n(z) dz}.$$

Rubna zadaća za Y_n poprima oblik

$$\begin{cases} Y_n''(y) - \mu_n Y_n = 0 \\ Y_n(\pm b) = \pm L_n. \end{cases}$$

Pretpostavimo da je rješenje eksponencijalnog oblika $Y_n \sim e^{\alpha_n y}$. Uvrštavanjem u jednadžbu dobijemo da je $\alpha_n = \pm\sqrt{\mu_n}$, odnosno da je

$$Y_n = b_1 e^{\sqrt{\mu_n} y} + b_2 e^{-\sqrt{\mu_n} y}.$$

Iz rubnih uvjeta proizlazi da je

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{L_n}{2\text{sh}(\sqrt{\mu_n} b)} \\ b_2 &= -b_1, \end{aligned}$$

pa je rješenje

$$Y_n = L_n \frac{\text{sh}(\sqrt{\mu_n} y)}{\text{sh}(\sqrt{\mu_n} b)}.$$

Time smo dobili traženi izraz za Ψ_3 :

$$\Psi_3 = \sum_n L_n \frac{\text{sh}(\sqrt{\mu_n} y)}{\text{sh}(\sqrt{\mu_n} b)} \frac{1}{N_n} \left(\sin \left(\frac{\sqrt[4]{K}H}{\tilde{b}_n} \right) \sin \left(\sqrt[4]{K}\tilde{b}_nz \right) - \sin \left(\sqrt[4]{K}\tilde{b}_nH \right) \sin \left(\frac{\sqrt[4]{K}}{\tilde{b}_n} z \right) \right).$$

1.4. Strujna funkcija

Rješenje početne zadaće (I.14-15) za strujnu funkciju Ψ jednako je zbroju rješenja

$$\Psi_H = \Psi_P + \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3.$$

Nakon uvrštavanja odgovarajućih izraza za pojedinačna rješenja dobijemo

$$\begin{aligned} \Psi(y, z) = & \frac{g}{\rho_0} \frac{A_z}{f^2} 2cy + \sum_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \frac{D_n}{(\omega_{1n}^2 - \omega_{2n}^2) (E_n \text{sh}(\omega_{1n}H) - F_n \text{sh}(\omega_{2n}H))} \\ & \left((\omega_{1n}^2 - \omega_{2n}^2) (F_n \text{sh}(\omega_{2n}z) - E_n \text{sh}(\omega_{1n}z)) \right. \\ & + p_z \omega_{2n}^2 \omega_{1n} \text{sh}(\omega_{2n}H) \text{ch}(\omega_{1n}(z+H)) + p_z \omega_{1n}^2 \omega_{2n} \text{sh}(\omega_{1n}H) \text{ch}(\omega_{2n}(z+H)) \\ & + \omega_{1n}^2 (-F_n + \omega_{2n}^2 \text{sh}(\omega_{1n}H)) \text{sh}(\omega_{2n}(z+H)) + p_z \omega_{1n}^2 \omega_{2n} \text{sh}(\omega_{1n}z) \\ & \left. + \omega_{2n}^2 (-E_n + \omega_{1n}^2 \text{sh}(\omega_{2n}H)) \text{sh}(\omega_{1n}(z+H)) + p_z \omega_{2n}^2 \omega_{1n} \text{sh}(\omega_{2n}z) \right) \\ & + \sum_n L_n \frac{\text{sh}(\sqrt{\mu_n}y)}{\text{sh}(\sqrt{\mu_n}b)} \frac{1}{N_n} \left(\sin\left(\frac{\sqrt[4]{K}H}{\tilde{b}_n}\right) \sin\left(\sqrt[4]{K}\tilde{b}_n z\right) - \sin\left(\sqrt[4]{K}\tilde{b}_n H\right) \sin\left(\frac{\sqrt[4]{K}}{\tilde{b}_n}z\right) \right), \end{aligned}$$

gdje je

$$\omega_{1n} = \sqrt{-\frac{A_y \lambda_n}{A_z} \frac{1}{2} - \sqrt{\left(\frac{A_y}{A_z}\right)^2 \frac{\lambda_n^2}{4} - \frac{f^2}{A_z^2}}, \quad \omega_{2n} = \sqrt{-\frac{A_y \lambda_n}{A_z} \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{A_y}{A_z}\right)^2 \frac{\lambda_n^2}{4} - \frac{f^2}{A_z^2}},$$

$$\lambda_n = -\frac{n^2 \pi^2}{b^2}, \quad \mu_n = \sqrt{K} \frac{A_z}{A_y} \left(\tilde{b}_n^2 + \frac{1}{\tilde{b}_n^2} \right), \quad n \in \mathbf{N},$$

$$K = \frac{f^2}{A_z^2}, \quad D_n = \frac{g}{\rho_0} \frac{A_z}{f^2} 4c \frac{b}{n\pi} (-1)^n, \quad p_z = \frac{k_z}{A_z},$$

$$E_n = p_z \omega_{2n} \text{ch}(\omega_{2n}H) + \omega_{2n}^2 \text{sh}(\omega_{2n}H), \quad F_n = p_z \omega_{1n} \text{ch}(\omega_{1n}H) + \omega_{1n}^2 \text{sh}(\omega_{1n}H),$$

$$L_n = \frac{\frac{g}{\rho_0} \frac{A_z}{f^2} 2cb \int_{-H}^0 Z_n''(z) dz}{\int_{-H}^0 Z_n''(z) Z_n(z) dz}.$$

$$Z_n = \frac{1}{N_n} \left(\sin\left(\frac{\sqrt[4]{K}H}{\tilde{b}_n}\right) \sin\left(\sqrt[4]{K}\tilde{b}_n z\right) - \sin\left(\sqrt[4]{K}\tilde{b}_n H\right) \sin\left(\frac{\sqrt[4]{K}}{\tilde{b}_n}z\right) \right),$$

$$N_n = \sqrt{\int_{-H}^0 \left| \sin\left(\frac{\sqrt[4]{K}H}{\tilde{b}_n}\right) \sin\left(\sqrt[4]{K}\tilde{b}_n z\right) - \sin\left(\sqrt[4]{K}\tilde{b}_n H\right) \sin\left(\frac{\sqrt[4]{K}}{\tilde{b}_n}z\right) \right|^2 dz},$$

dok su \tilde{b}_n nultočke jednadžbe (8).

2. Rješenje za dužobalno strujanje

Integracijom izraza (I.16) na intervalu $[-H, z]$ slijedi da je

$$(9) \quad u - u_{-H} = \frac{f}{A_z} \int_{-H}^z \Psi(y, z) dz.$$

S druge strane, isti izraz, zajedno s rubnim uvjetom (I.15) nam daje:

$$A_z \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{-H} = f \Psi_{-H} = 0.$$

Koristeći parametrizaciju smicanja strujanja u priobalnom sloju

$$A_z \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{-H} - k_z u_{-H} = 0,$$

zaključujemo da je

$$u_{-H} = 0.$$

Time smo dobili da je kao posljedica rubnih uvjeta pridnena dužobalna brzina jednaka nuli.

Izraz (9) sada postaje

$$u = \frac{f}{A_z} \int_{-H}^z \Psi(y, z) dz.$$

Zbog složenosti izraza za strujnu funkciju, dužobalnu funkciju nećemo pisati u analitičkom obliku, već ćemo je računati numeričkom integracijom.

III. Rezultati

1. Termohalina cirkulacija

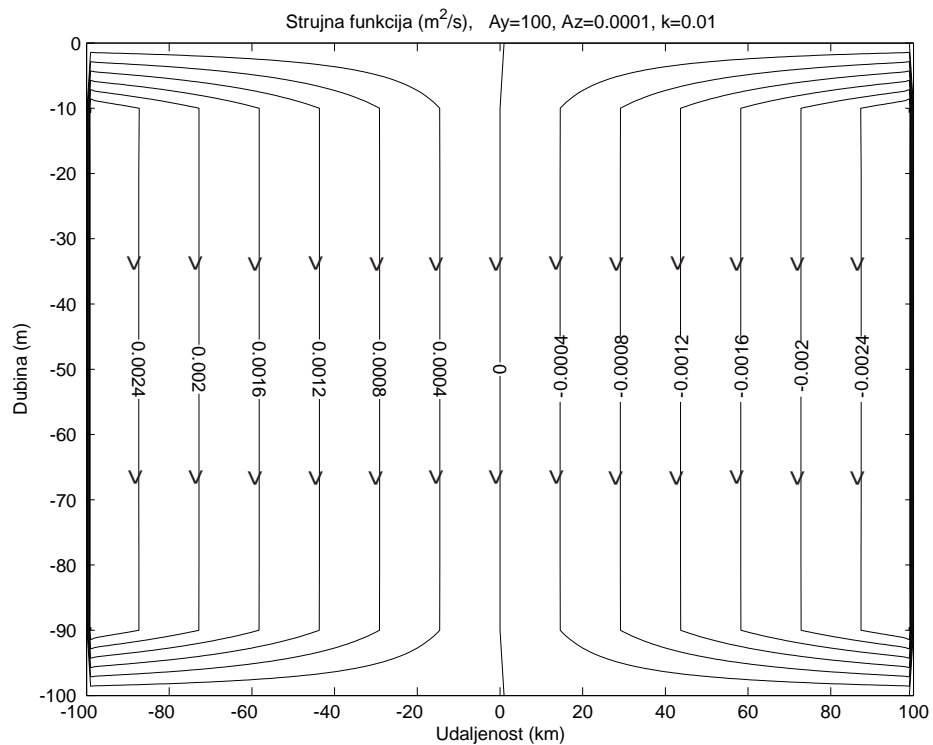
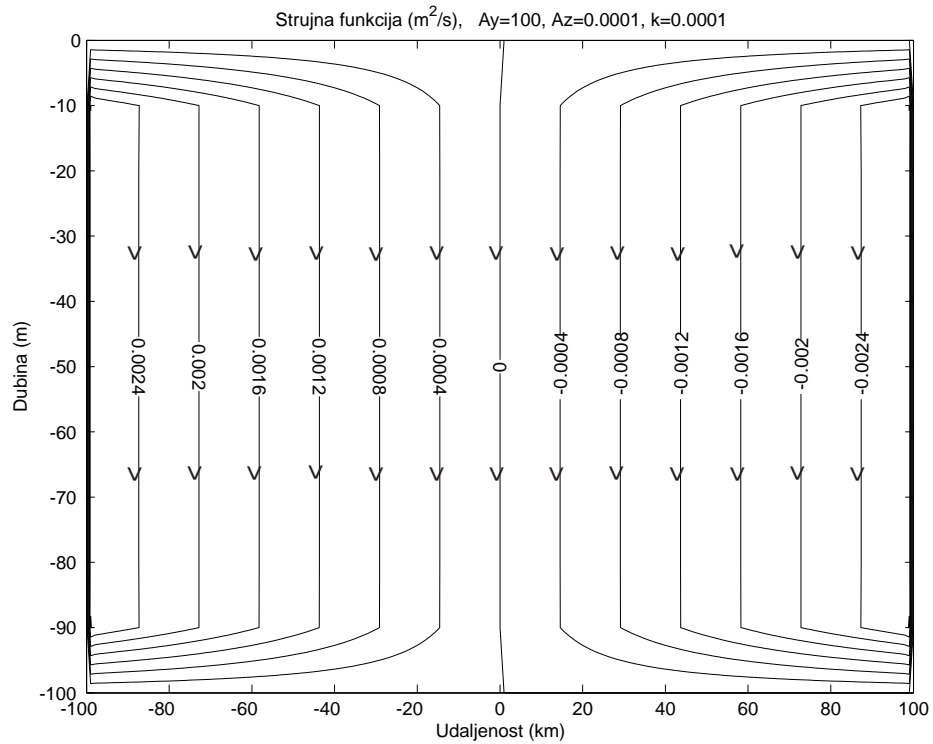
Rješenje za strujnu funkciju prikazano je na slikama 2.-7. Promatra se slučaj kad nema toplinskih tokova kroz granice bazena ($Q_s = \Delta T = 0$), pa je strujanje uzrokovano isključivo razdiobom saliniteta. Očekujemo da ta pretpostavka neće bitno utjecati na rješenje s obzirom da u konstanti $c = -\frac{\rho_0 R}{2bN_y}(\alpha\Delta T + \beta S_0)$, koja ulazi u izraz za strujnu funkciju, termalni član $\alpha\Delta T$ je za red veličine manji od halinog člana βS_0 . U računu su korištene sljedeće vrijednosti za razne numeričke parametre: $H = 100\text{m}$, $b = 10^5\text{m}$, $E - P = 10^{-8}\text{ms}^{-1}$, $\rho_0 = 10^3\text{kg m}^{-3}$, $R = 10^{-5}\text{ms}^{-1}$, $\beta = 8 \cdot 10^{-4}\text{psu}^{-1}$, $S_0 = 35\text{psu}$, $N_y = 10\text{m}^2\text{s}^{-1}$ i $f = 10^{-4}\text{s}^{-1}$. One su odabrane tako da odgovaraju tipičnim vrijednostima za Jadran [O]. Prikazana su rješenja za različite vrijednosti parametara A_y , A_z i k_z .

Za male vrijednosti sile lateralnog trenja ($A_y = 100\text{m}^2\text{s}^{-1}$) model potvrđuje rezultate prethodnih modela, [P], [Ž]. Predviđa se uzlazno gibanje koncentrirano u blizini obala koje je kompenzirano silaznim gibanjima u većem dijelu bazena (slike 2. i 3.).

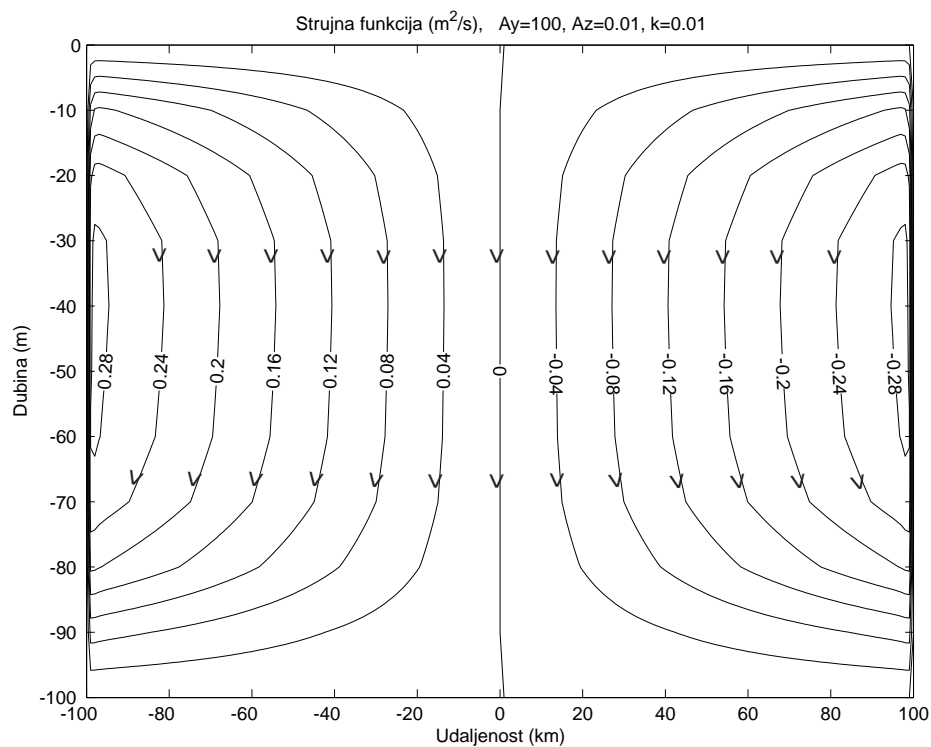
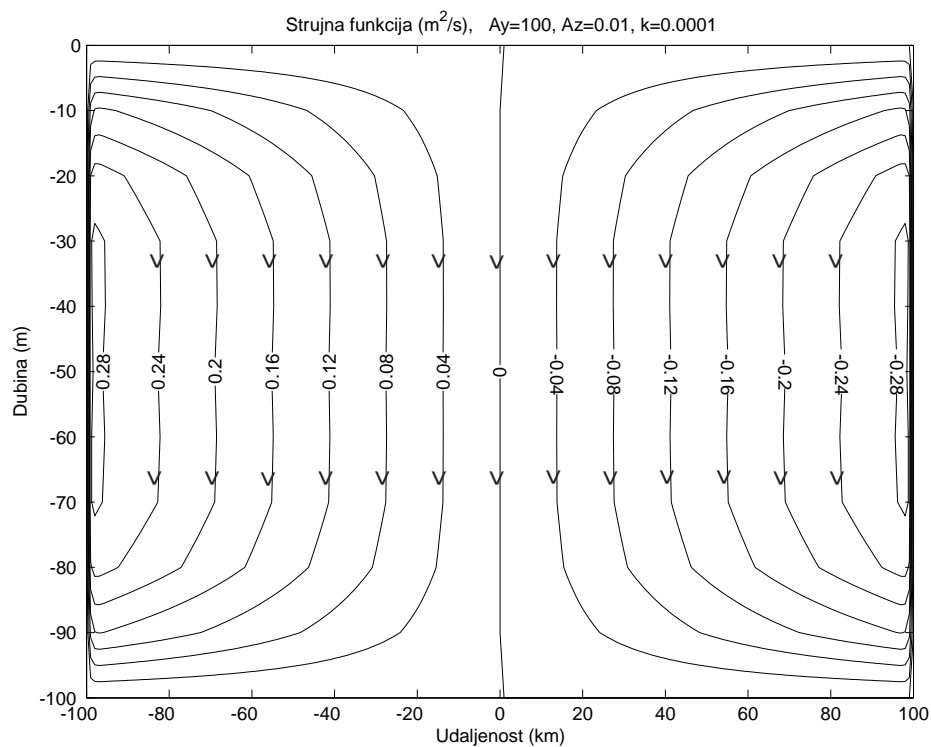
Kada je koeficijent vertikalne turbulentne izmjene impulsa najmanji, $A_z = 10^{-4}\text{m}^2\text{s}^{-1}$ (slika 2.), javlja se kvazigeostrofička ravnoteža koju karakterizira dobro razvijeno dužobalno, te smanjeno poprečno strujanje. Utjecaj trenja nije velik, što je u skladu s očekivanjima zbog male izmjene impulsa između slojeva mora, i očituje se samo u površinskom i pridnenom sloju, a strujna funkcija je reda veličine $10^{-3}\text{m}^2\text{s}^{-1}$. Povećanjem sile vertikalnog trenja, odnosno koeficijenta A_z , povećava se i debljina sloja utjecaja trenja (slika 3.). Narušava se kvazigeostrofička ravnoteža, što za posljedicu ima jačanje haline cirkulacije, te slabljenje dužobalnog strujanja. Za vrijednost koeficijenta $A_z = 10^{-3}\text{m}^2\text{s}^{-1}$ strujna funkcija je reda veličine $10^{-2}\text{m}^2\text{s}^{-1}$, a za vrijednost koeficijenta $A_z = 10^{-2}\text{m}^2\text{s}^{-1}$ strujna funkcija je približno jednaka $10^{-1}\text{m}^2\text{s}^{-1}$.

Utjecaj pridnenog trenja ne dolazi do izražaja za male vrijednosti koeficijenta vertikalnog turbuletnog trenja A_z (slika 2.), što je opet u skladu s očekivanjima zbog male izmjene impulsa između slojeva mora. S povećanjem vrijednosti koeficijenta A_z dolazi do izražaja djelovanje pridnenog trenja. Za male vrijednosti koeficijenta pridnenog trenja ($k_z = 10^{-4}\text{ms}^{-1}$) strujno polje je gotovo simetrično. Njegovim povećanjem narušava se simetrija strujnog polja u donjem dijelu bazena (dolazi do potiskivanja strujanja od dna prema površini), dok pri površini strujanje ostaje gotovo nepromijenjeno (slika 3.).

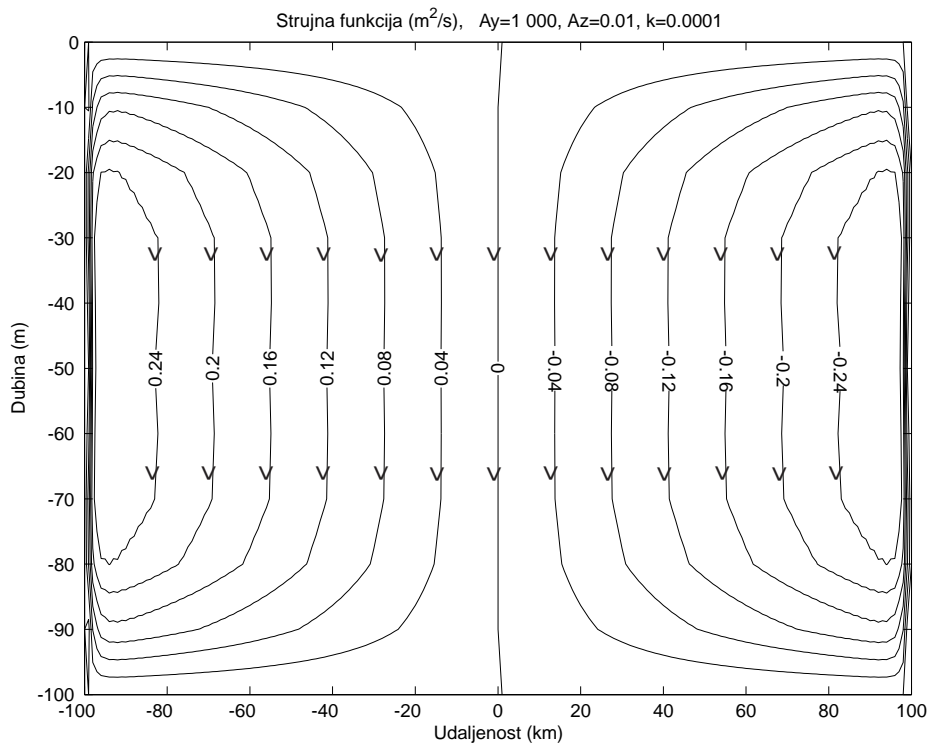
Do određenih promjena u cirkulaciji dolazi s povećanjem koeficijenta lateralnog trenja. Zbog povećane izmjene impulsa između vertikalnih slojeva, dolazi do povećanja debljine sloja utjecaja trenja. To rezultira potiskivanjem cirkulacije od obale prema sredini bazena (slike 4. i 6.). Na taj način, uzlazno gibanje, koje je prije bilo koncentrirano uz samu obalu i na slikama 2. i 3. nije bilo uočljivo, širi se na područje dalje od obale i postaje jasno izraženo. Taj fenomen najjasnije dolazi do izražaja za velike iznose koeficijenta vertikalnog trenja A_z i male iznose koeficijenta pridnenog trenja k_z .



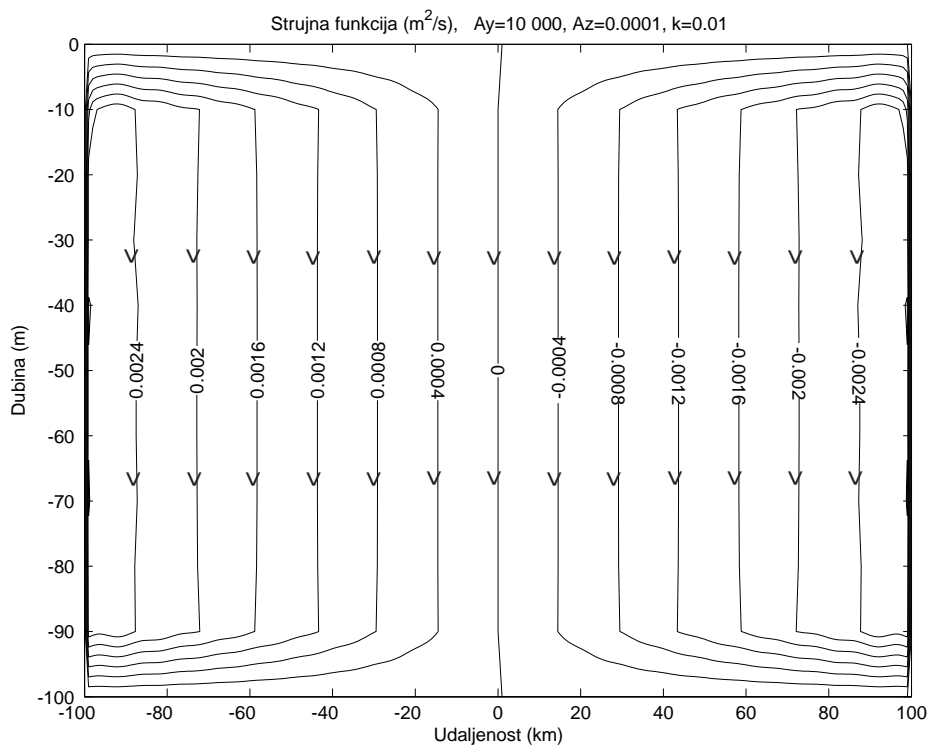
Slika 2. Prikaz strujne funkcije na presjeku bazena za koeficijente turbulentne izmjene impulsa $A_y = 100m^2s^{-1}$ i $A_z = 10^{-4}m^2s^{-1}$, te koeficijente pridnenog trenja $k_z = 10^{-4}ms^{-1}$ i $k_z = 10^{-2}ms^{-1}$



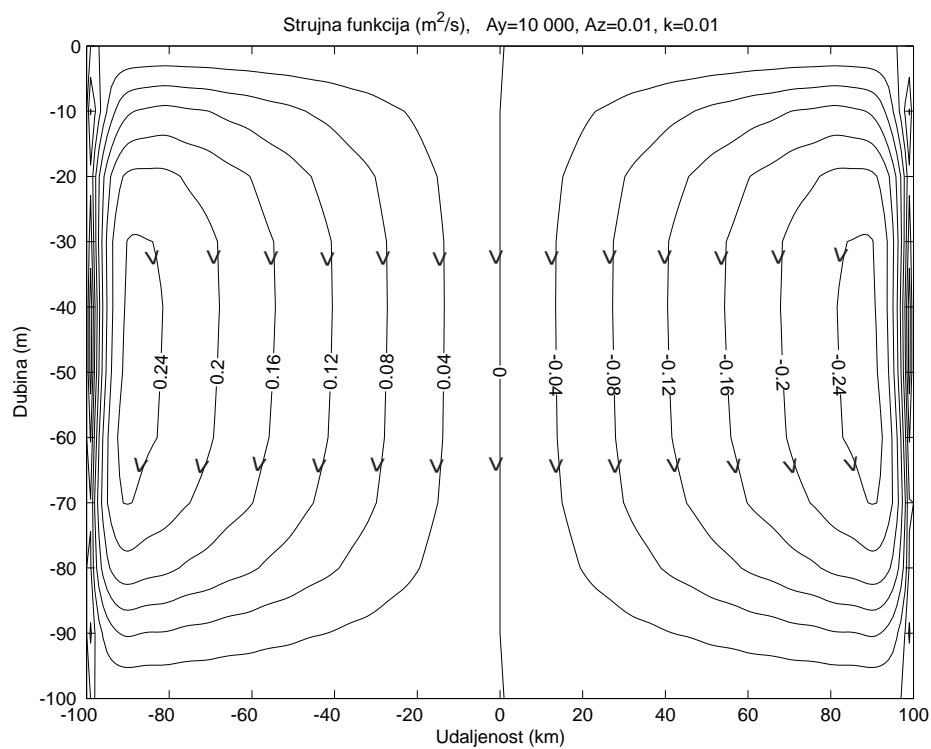
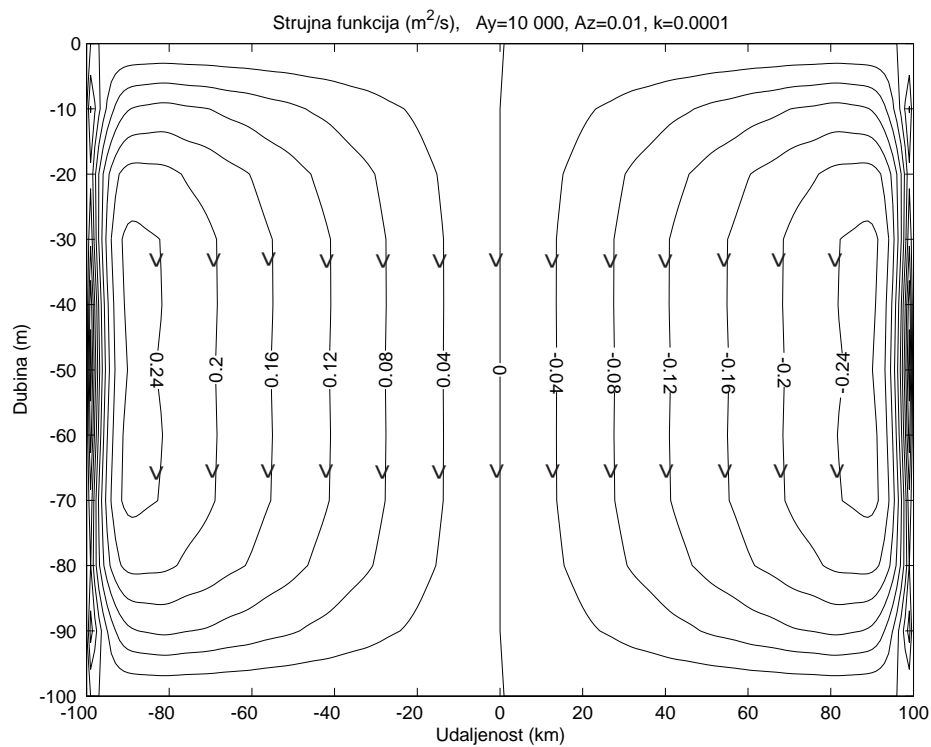
Slika 3. Prikaz strujne funkcije na presjeku bazena za koeficijente turbulentne izmjene impulsa $A_y = 100\text{m}^2\text{s}^{-1}$ i $A_z = 10^{-2}\text{m}^2\text{s}^{-1}$, te koeficijente pridnenog trenja $k_z = 10^{-4}\text{ms}^{-1}$ i $k_z = 10^{-2}\text{ms}^{-1}$



Slika 4. Prikaz strujne funkcije na presjeku bazena za koeficijente turbulentne izmjene impulsa $A_y = 1\ 000 m^2 s^{-1}$ i $A_z = 10^{-2} m^2 s^{-1}$, te koeficijent pridnenog trenja $k_z = 10^{-4} ms^{-1}$



Slika 5. Prikaz strujne funkcije na presjeku bazena za koeficijente turbulentne izmjene impulsa $A_y = 10\ 000 m^2 s^{-1}$ i $A_z = 10^{-4} m^2 s^{-1}$, te koeficijent pridnenog trenja $k_z = 10^{-2} ms^{-1}$

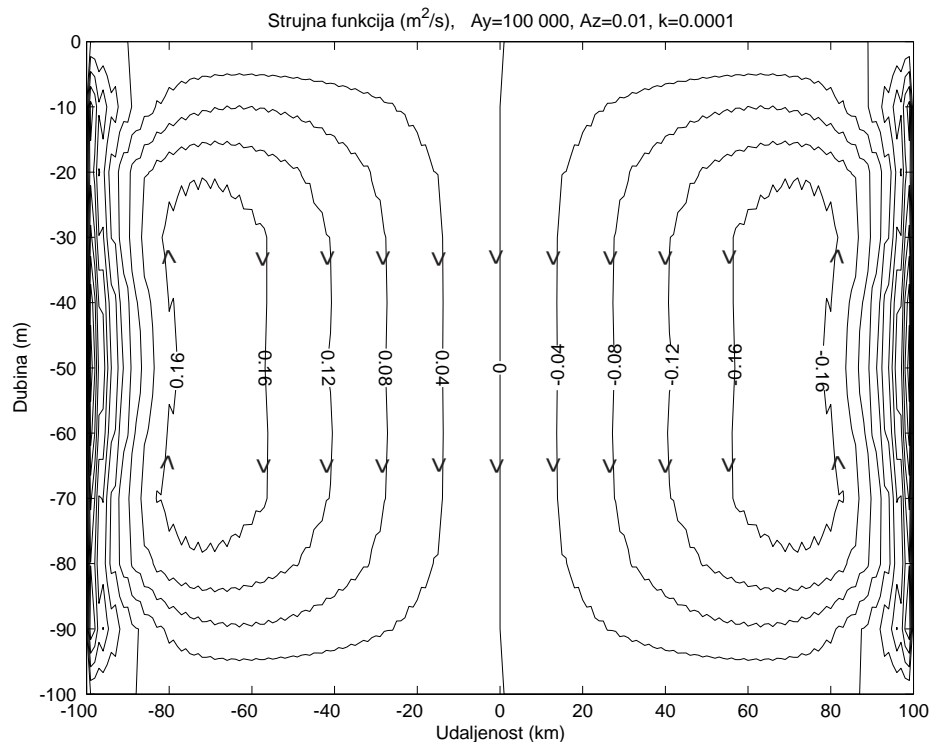


Slika 6. Prikaz strujne funkcije na presjeku bazena za koeficijente turbulentne izmjene impulsa $A_y = 10\ 000\text{m}^2\text{s}^{-1}$ i $A_z = 10^{-2}\text{m}^2\text{s}^{-1}$, te koeficijente pridnenog trenja $k_z = 10^{-4}\text{ms}^{-1}$ i $k_z = 10^{-2}\text{ms}^{-1}$

Strujanja postaju posebno zanimljiva ako se koeficijent lateralnog trenja poveća za još jedan red veličine, to jest ako se uzme $A_y = 10^5 \text{m}^2 \text{s}^{-1}$, što je još uvijek realna vrijednost (slika 7.). U tom slučaju dolazi do daljnjeg potiskivanja uzlaznog strujanja od obale, što otvara prostor za stvaranje nove vertikalne ćelije između obale i zone uzdizanja vodenih masa. Ta ćelija se sužava idući od dna prema površini, a smjer cirkulacije u njoj je obratan od smjera cirkulacije u ostatku pripadne polovice bazena. Kao posljedica toga dolazi do stvaranja anticiklonalne cirkulacije uz samu obalu, što će detaljnije biti opisano u sljedećem odjeljku. Spomenuti fenomen primjećuje se već i na slikama 4. i 6., za vrijednosti koeficijenta lateralnog trenja $A_y = 10^3 \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ i $A_y = 10^4 \text{m}^2 \text{s}^{-1}$, ali jasno dolazi do izražaja tek za vrijednost $A_y = 10^5 \text{m}^2 \text{s}^{-1}$.

Napomenimo da odsutnost glatkoće rješenja u slučaju $A_y = 10^5 \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ (jasno izražena na slici 7.) nema fizikalnu pozadinu, već je posljedica nesavršenosti korištenog numeričkog aparata. Naime, iako je nađeno analitičko rješenje, ono je dano u obliku reda koji aproksimiramo konačnom sumom. Zbog prekoračenja koje se javlja prilikom računa, broj članova parcijalne sume je malen, što je rezultiralo neuglatkom dobivenog rješenja.

Povećanje sile lateralnog trenja ne narušava već prije navedena i opisana svojstva cirkulacije u slučaju malog iznosa koeficijenta A_y . Tako se jačanjem sile vertikalnog unutarnjeg trenja i dalje narušava kvazigeostrofička ravnoteža, što ima za posljedicu jačanje haline cirkulacije, te slabljenje dužobalnog strujanja (slike 5. i 6.). Utjecaj pridnenog trenja se, također, očituje samo za velike iznose koeficijenta A_z i rezultira narušavanjem simetrije i potiskivanjem strujanja od dna (slika 6.). Na kraju napomenimo da, za razliku od koeficijenta A_z , iznos koeficijenta lateralnog trenja A_y ne utječe na red veličine strujne funkcije.



Slika 7. Prikaz strujne funkcije na presjeku bazena za koeficijente turbulentne izmjene impulsa $A_y = 100\,000 \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ i $A_z = 10^{-2} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$, te koeficijent pridnenog trenja $k_z = 10^{-4} \text{ms}^{-1}$

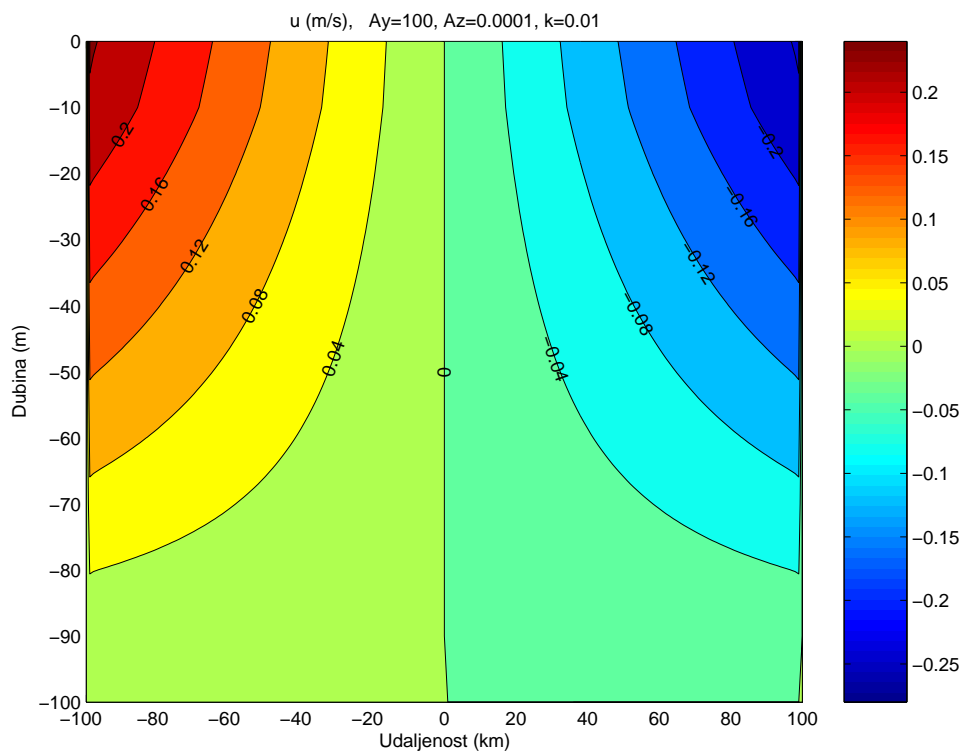
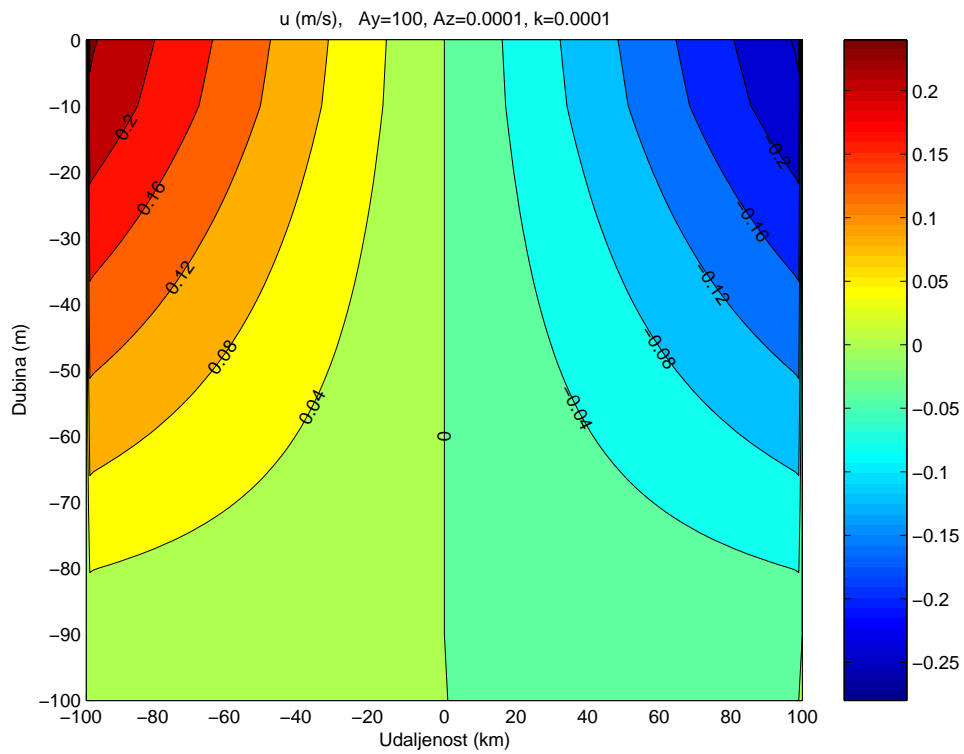
2. Dužobalno strujanje

Dužobalno strujanje se javlja kao posljedica kvazigeostrofičke ravnoteže, odnosno, djelovanja Coriolisove sile. Rješenje za dužobalno strujanje dobiveno je numeričkom integracijom strujne funkcije i prikazano je na slikama 8.-13.

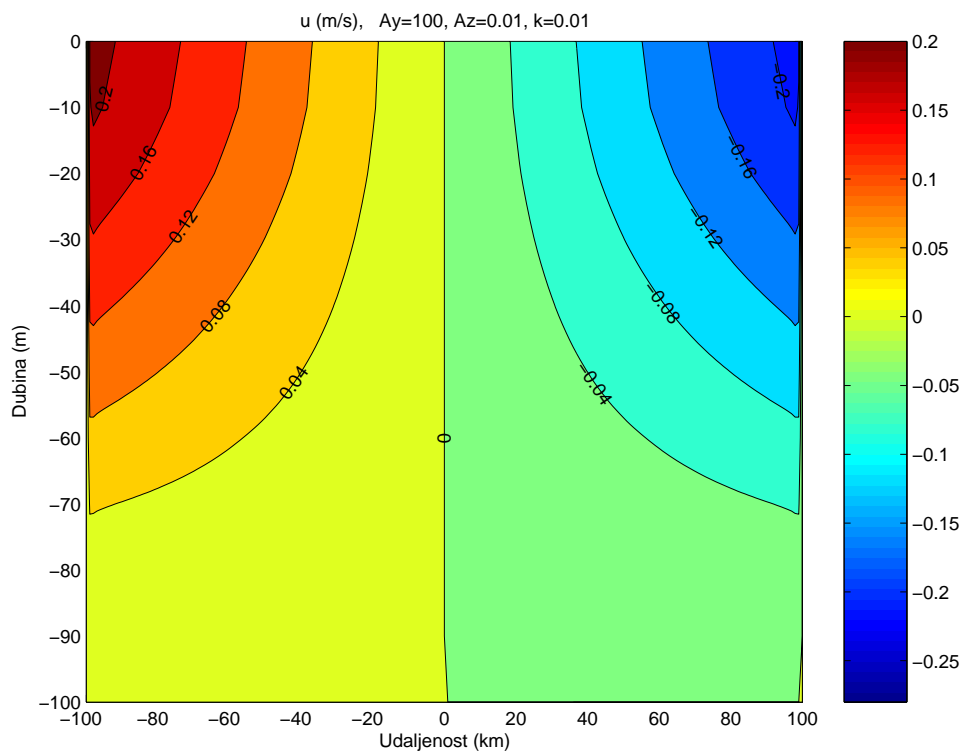
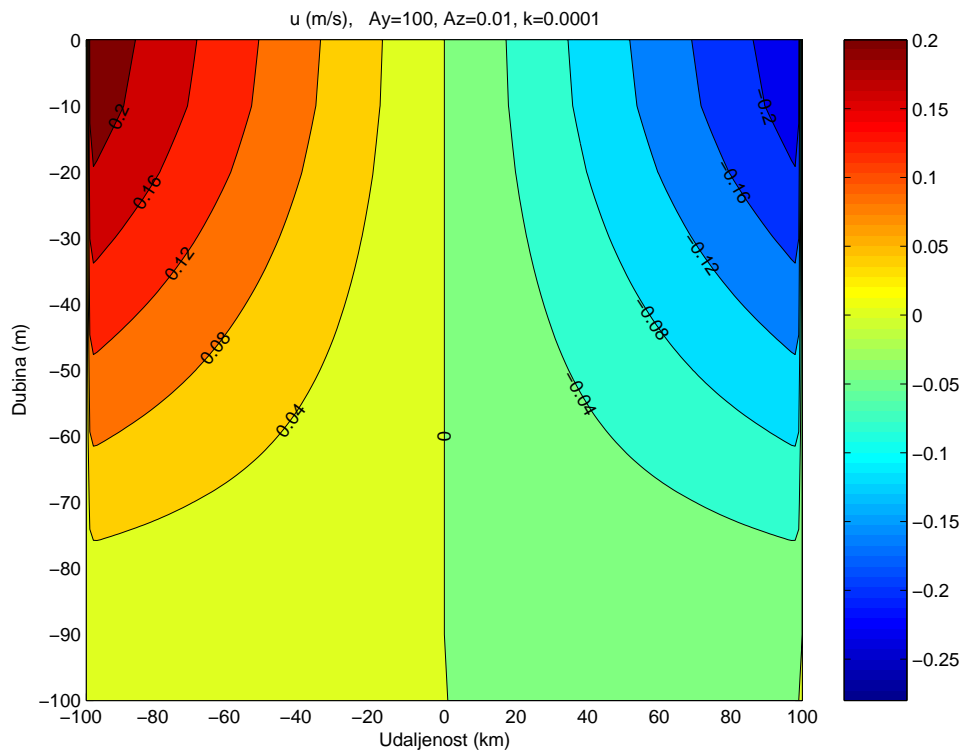
Za male vrijednosti koeficijenta lateralnog trenja A_y model potvrđuje rezultate prethodnih modela, [P], [Ž], i predviđa ciklonalnu cirkulaciju u gornjem dijelu bazena reda veličine 10^{-1}ms^{-1} . Za različite koeficijente turbulentne izmjene A_z oblik strujanja ostaje isti, a intezitet struja se slabo mijenja. Povećanjem koeficijenta vertikalnog trenja A_z remeti se kvazigeostrofička ravnoteža, te zbog toga nastaje nešto slabije dužobalno strujanje. Utjecaj pridnenog trenja ne dolazi do izražaja za male vrijednosti koeficijenta A_z , što je u skladu s očekivanjima zbog male izmjene impulsa između slojeva mora. Utjecaj pridnenog trenja za velike iznose koeficijenta turbulentne izmjene impulsa, $A_z = 10^{-2}\text{m}^2\text{s}^{-1}$, očituje se u potiskivanju dužobalnog strujanja prema gornjem dijelu bazena, kao i u njegovom slabljenju (slika 9.).

Kao što je već navedeno u prethodnom odjeljku, povećanjem lateralnog trenja dolazi do potiskivanja uzlaznih gibanja od obale. Ona pri tom zauzimaju šire područje, a u slučaju vrijednosti koeficijenta lateralnog trenja $A_y = 10^5\text{m}^2\text{s}^{-1}$ otvara se prostor za stvaranje nove priobalne vertikalne ćelije suprotnog smjera cirkulacije od one u ostatku pripadne polovice bazena. Kao rezultat djelovanja Coriolisove sile, u tom području dolazi do stvaranja anticiklonalne cirkulacije. Ona je pri dnu slabijeg inteziteta i zauzima šire područje, dok se prema površini njen pojas sužava, ali joj zato jača intezitet (slika 13.). Ova pojava se primjećuje i za manje vrijednosti koeficijenta lateralnog trenja, $A_y = 10^3\text{m}^2\text{s}^{-1}$ i $A_y = 10^4\text{m}^2\text{s}^{-1}$ (slike 10. i 12.), a za fiksnu vrijednost koeficijenta A_y najjasnije dolazi do izražaja za velike iznose koeficijenta vertikalnog trenja A_z i male iznose koeficijenta pridnenog trenja k_z . Ponovimo da je odsutnost glatkoće rješenja u slučaju vrijednosti koeficijenta $A_y = 10^5\text{m}^2\text{s}^{-1}$ posljedica nesavršenosti korištenog numeričkog aparata, kao što je već pojašnjeno u prethodnom odjeljku.

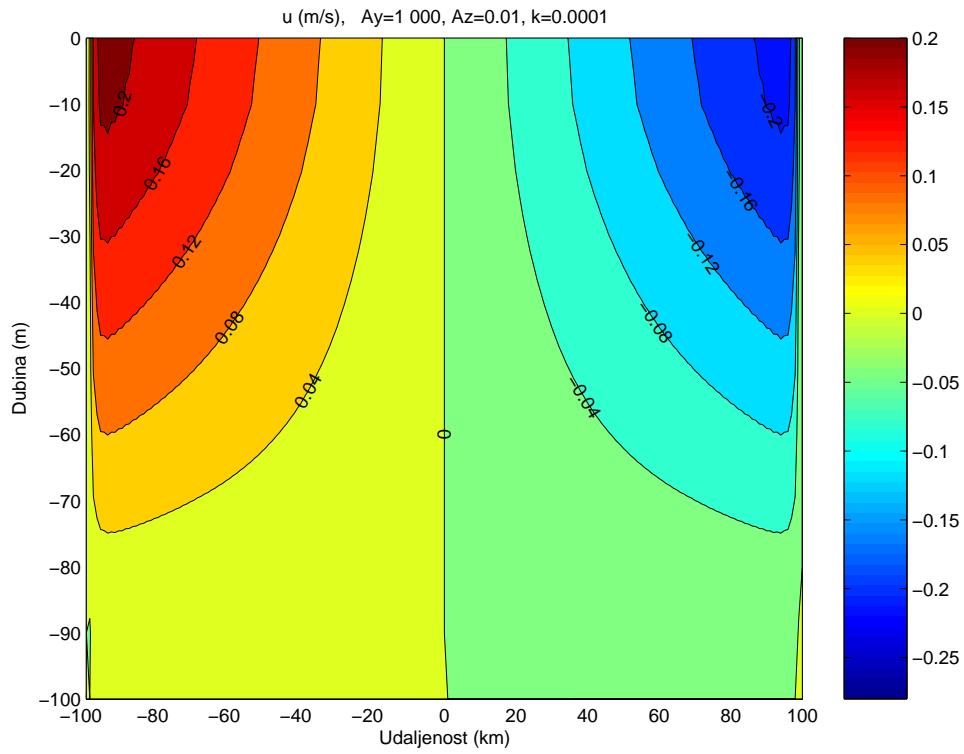
Na kraju, napomenimo da se s povećanjem sile lateralnog trenja ne mijenjaju ostala, već prije opisana svojstva dužobalnog strujanja u slučaju malog iznosa koeficijenta A_y . Tako jačanjem sile vertikalnog trenja dolazi do narušavanja kvazigeostrofičke ravnoteže i slabljenja dužobalnog strujanja (slike 11. i 12.), dok se utjecaj pridnenog trenja i dalje očituje samo za velike vrijednosti koeficijenta A_z i rezultira potiskivanjem strujanja prema površini (slika 12.). Također, red veličine dužobalnog strujanja je konstantan i iznosi 10^{-1}ms^{-1} za sve vrijednosti koeficijenata A_y , A_z i k_z .



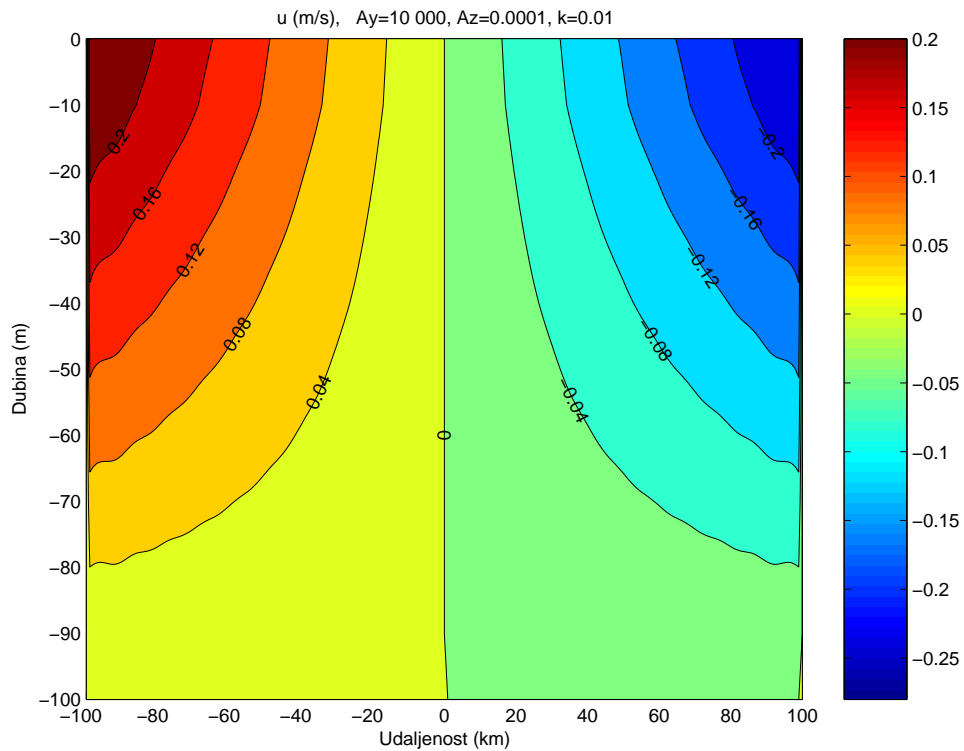
Slika 8. Prikaz dužobalnog strujanja na presjeku bazena za koeficijente turbulentne izmjene impulsa $A_y = 100\text{m}^2\text{s}^{-1}$ i $A_z = 10^{-4}\text{m}^2\text{s}^{-1}$, te koeficijente pridonog trenja $k_z = 10^{-4}\text{ms}^{-1}$ i $k_z = 10^{-2}\text{ms}^{-1}$



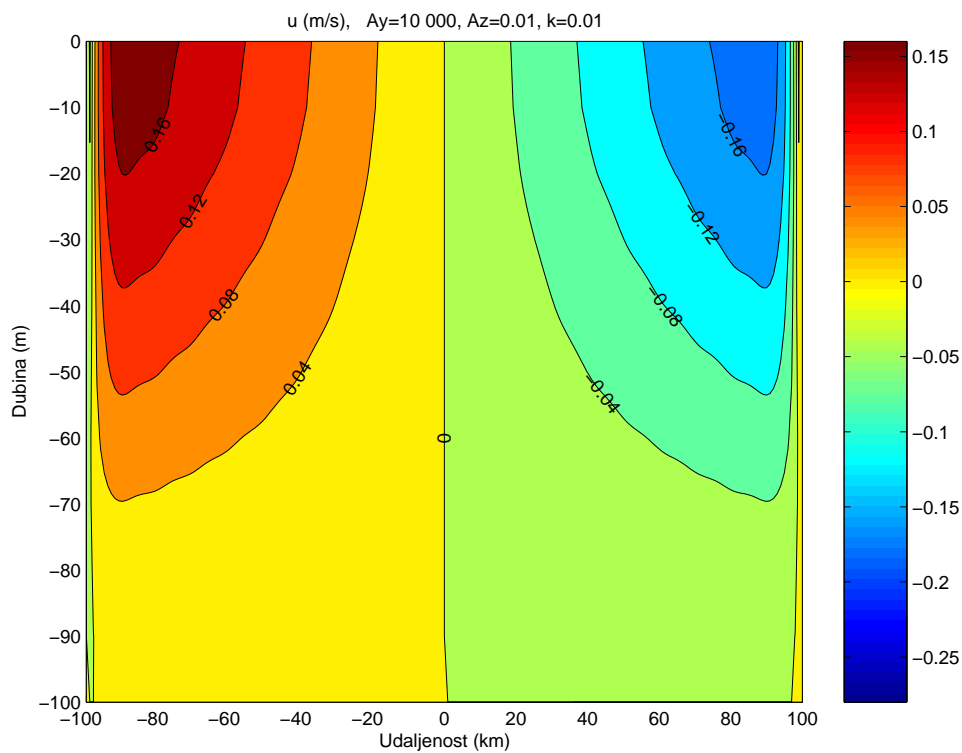
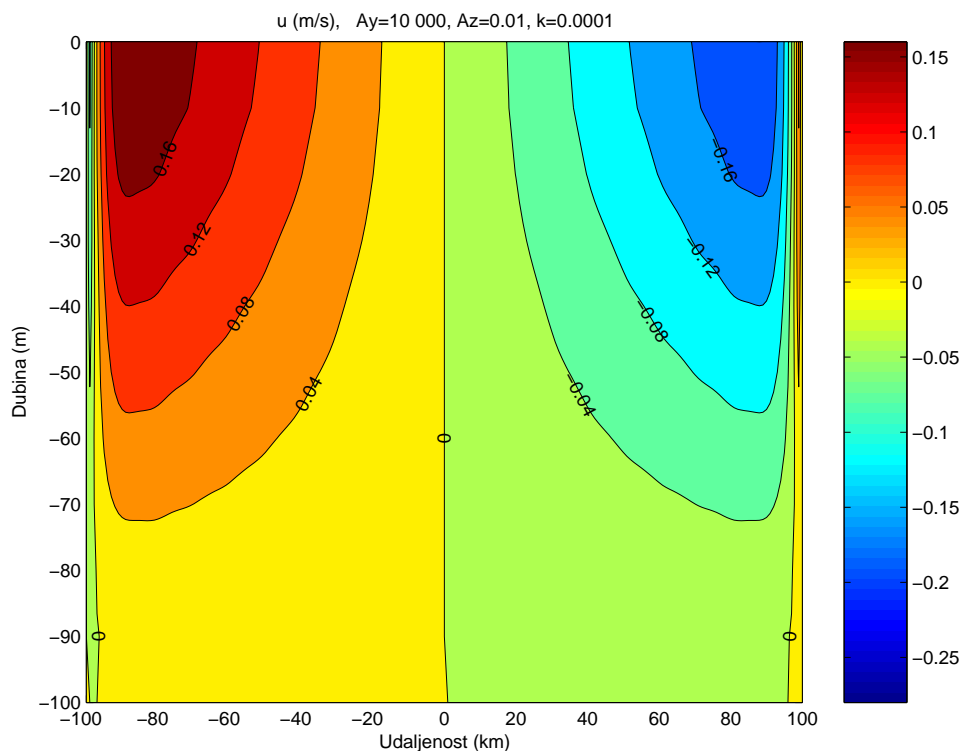
Slika 9. Prikaz dužobalnog strujanja na presjeku bazena za koeficijente turbulentne izmjene impulsa $A_y = 100\text{m}^2\text{s}^{-1}$ i $A_z = 10^{-2}\text{m}^2\text{s}^{-1}$, te koeficijente pridnenog trenja $k_z = 10^{-4}\text{ms}^{-1}$ i $k_z = 10^{-2}\text{ms}^{-1}$



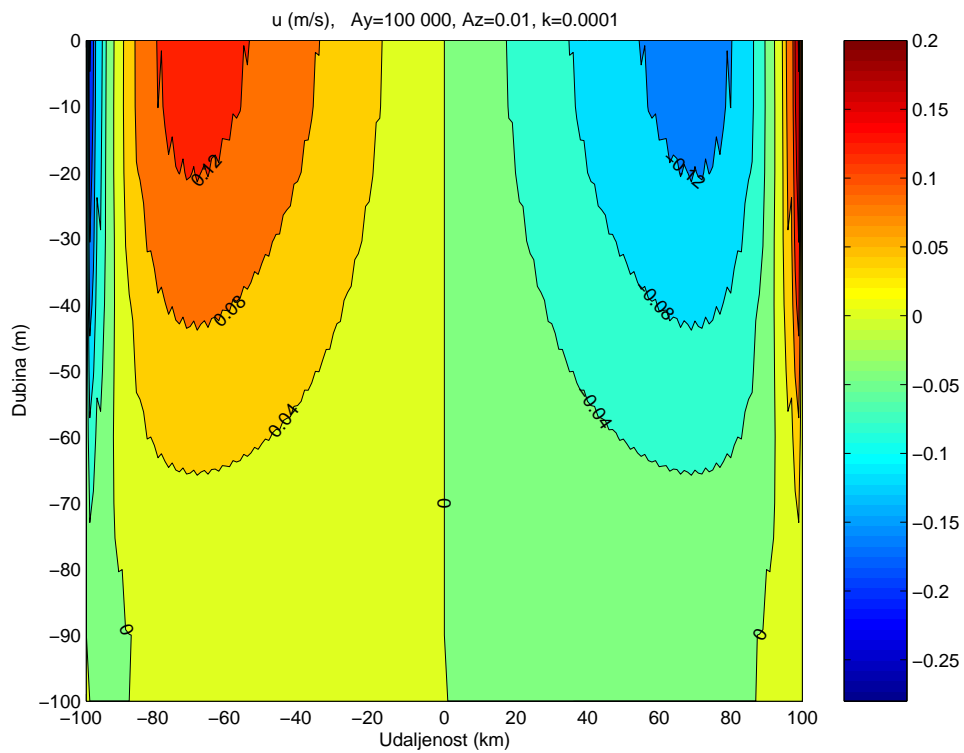
Slika 10. Prikaz dužobalnog strujanja na presjeku bazena za koeficijente turbulentne izmjene impulsa $A_y = 1\ 000\text{m}^2\text{s}^{-1}$ i $A_z = 10^{-2}\text{m}^2\text{s}^{-1}$, te koeficijent pridnenog trenja $k_z = 10^{-4}\text{ms}^{-1}$



Slika 11. Prikaz dužobalnog strujanja na presjeku bazena za koeficijente turbulentne izmjene impulsa $A_y = 10\ 000\text{m}^2\text{s}^{-1}$ i $A_z = 10^{-4}\text{m}^2\text{s}^{-1}$, te koeficijent pridnenog trenja $k_z = 10^{-2}\text{ms}^{-1}$



Slika 12. Prikaz dužobalnog strujanja na presjeku bazena za koeficijente turbulentne izmjene impulsa $A_y = 10\,000\text{m}^2\text{s}^{-1}$ i $A_z = 10^{-2}\text{m}^2\text{s}^{-1}$, te koeficijente pridnenog trenja $k_z = 10^{-4}\text{ms}^{-1}$ i $k_z = 10^{-2}\text{ms}^{-1}$



Slika 13. Prikaz dužobalnog strujanja na presjeku bazena za koeficijente turbulentne izmjene impulsa $A_y = 100\,000\text{m}^2\text{s}^{-1}$ i $A_z = 10^{-2}\text{m}^2\text{s}^{-1}$, te koeficijent pridnenog trenja $k_z = 10^{-4}\text{ms}^{-1}$

3. Zaključak

Ovim radom, to jest uvođenjem lateralnog trenja, poboljšani su prijašnji analitički modeli ([O], [Ž], [P]) zimske termohaline cirkulacije u sjevernom Jadranu. Međutim, da bismo sačuvali analitičnost rješenja i u ovom modelu, morali smo se ograničiti na hidrostatski slučaj, odnosno, zanemariti članove $A_y \frac{\partial w}{\partial y^2}$ i $A_z \frac{\partial w}{\partial z^2}$ u jednadžbama gibanja. Tako dobiveni model je bio dovoljno jednostavan da posjeduje analitično rješenje za strujnu funkciju. Unatoč tome, moralo se primijeniti numeričko računanje određenih koeficijenata. Također, dužobalno strujanje, koje se dobije iz izraza za strujnu funkciju, nije dato u analitičkom obliku, već se izračunalo numeričkom integracijom.

Model opisuje termohalinu cirkulaciju sjevernog Jadrana kada dolazi do jakog vertikalnog miješanja. U to doba polje gustoće pokazuje maksimum u središnjem dijelu bazena. Tri su razloga za stvaranje upravo takve razdiobe gustoće:

- 1) Meteorološke prilike dovode do površinskog ohlađivanja i povećanja gustoće Jadrana u zimskom razdoblju. Ponajprije se to odnosi na toplinske tokove između mora i atmosfere, što se očituje u smanjenju površinske temperature Jadrana. Drugi, vrlo značajni efekt je isparavanje. Pod utjecajem bure, koja je karakteristična za hrvatsku obalu Jadrana, dolazi do jake evaporacije. Zbog prostorne i vremenske neuniformnosti polja vjetra teško je odrediti njegov utjecaj na navedene procese.
- 2) Dotok svježje vode dovodi do smanjivanja gustoće mora u priobalnom području. Najveći doprinos daje rijeka Po na talijanskoj strani Jadrana. Smatra se da doprinos rijeke Po iznosi oko 60% dotoka svih rijeka na talijanskoj strani Jadrana. Toplinski utjecaj riječne vode je od manjeg značenja i zanemaren je u ovom modelu.
- 3) Topografija utječe na promjenu gustoće u stupcu vode. Zapadna strana jadranskog bazena ima lagani nagib, dok se istočna strmo uzdiže. Stoga će na talijanskoj strani doći do brže izmjene u stupcu vode, pa će se gustoća mora tu brže povećati nego na hrvatskoj strani Jadrana.

Takva raspodjela polja gustoće rezultira silaznim gibanjima u većem, središnjem dijelu bazena, što se kompenzira uzlaznim strujanjima uz obalu. Kao posljedica lateralne cirkulacije na presjeku bazena i djelovanja Coriolisove sile javljaju se dužobalna strujanja.

Model ispravno predviđa osnovna, gore navedena svojstva zimskog termohalinog strujanja i predviđa ciklonalnu površinsku cirkulaciju reda veličine 10^{-1}ms^{-1} . Intenzitet dužobalnih struja se smanjuje s povećanjem trenja, što je posljedica remećenja kvazigeostrofičke ravnoteže. Pridнено trenje jako malo utječe na strujanje kada je sila vertikalnog unutarnjeg trenja mala zbog slabe izmjene impulsa između slojeva mora. Utjecaj pridnenog trenja očituje se samo za velike iznose koeficijenta A_z i rezultira potiskivanjem dužobalnog strujanja prema gornjem dijelu bazena i njegovom slabljenju, kao i narušavanjem simetrije strujnog polja u donjem dijelu bazena. Predviđeno dužobalno strujanje je ispravnog reda veličine, pa se može smatrati da je uzgonsko forsiranje bitan pokretač površinske ciklonalne cirkulacije u sjevernom Jadranu.

Uvođenje lateralnog trenja u model omogućilo je dodatnu analizu strujanja u ovisnosti o vrijednosti koeficijenta A_y . Za male vrijednosti sile lateralnog trenja ($A_y = 100 \text{m}^2 \text{s}^{-1}$) model potvrđuje rezultate prethodnih modela, [P], [Ž]. S povećanjem koeficijenta lateralnog trenja dolazi do određenih promjena u cirkulaciji. Zbog povećane izmjene impulsa između vertikalnih slojeva, povećava se debljina sloja utjecaja trenja. To rezultira potiskivanjem uzlaznih gibanja od obale prema sredini bazena. Ona pri tom zauzimaju šire područje, a u slučaju vrijednosti koeficijenta lateralnog trenja $A_y = 10^5 \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ otvara se prostor za stvaranje nove priobalne vertikalne ćelije suprotnog smjera cirkulacije od one u ostatku pripadne polovice bazena. Kao rezultat djelovanja Coriolisove sile, u tom području dolazi

do stvaranja anticiklonalne cirkulacije. Ona je pri dnu slabijeg intenziteta i zauzima šire područje, dok se prema površini njen pojas sužava, ali joj zato jača intenzitet. Ova pojava se primjećuje i za manje vrijednosti koeficijenta lateralnog trenja, $A_y = 10^3 \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ i $A_y = 10^4 \text{m}^2 \text{s}^{-1}$, a za fiksnu vrijednost koeficijenta A_y najjasnije dolazi do izražaja za velike iznose koeficijenta vertikalnog trenja A_z i male iznose koeficijenta pridnenog trenja k_z .

Dobiveni rezultat je značajan u svjetlu saznanja da je nedavno i eksperimentalno ustanovljena pridnena anticiklonalna cirkulacija u Jadranu [GCU]. Daljnji korak u istraživanjima bio bi u povezivanju ta dva elementa, teorijskog i empirijskog, u cilju dobivanja boljeg opisa i saznanja onoga što se stvarno događa u Jadranu.

Na kraju, napomenimo da smo se pri izradi ovog rada zadržali u okviru analitičkog rješenja modela. Iako smo zbog toga morali uvesti niz pretpostavki i ograničenja, cilj nam je bio da analizom ovakvog, relativno jednostavnog modela pokušamo bolje razumjeti samu fiziku promatranih procesa. Unatoč postojanju složenih numeričkih modela, koji su u stanju rješavati fizikalno realnije situacije, nadamo se da će ovaj rad, također, predstavljati dodatni korak u istraživanju Jadrana.

Literatura

- [GCU] Miroslav Gačić, Giuseppe Civitarese, Laura Ursella: *Spatial and seasonal variability of water and biogeochemical fluxes in the Adriatic Sea, The Eastern Mediterranean as a Laboratory Basin for the Assessment of Contrasting Ecosystems*, P. Malanotte-Rizzoli and V. N. Eremeev, eds., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1999) 335-357
- [H] Joseph Chi Kan Huang: *The thermal current in Lake Michigan*, *Journal of Physical Oceanography* **1** (1971) 105–122
- [O] Mirko Orlić: *An elementary model of density distribution, thermohaline circulation and quasigeostrophic flow in land-locked seas*, *Geofizika* **13** (1996) 61–80
- [P] Marko Pavić: *Analitičko modeliranje termohaline cirkulacije i kvazigeostrofičkog strujanja u Jadranu*, Diplomski rad u pripremi, Sveučilište u Zagrebu, 2003.
- [PP] Stephen Pond, George L. Pickard: *Introductory Dynamical Oceanography*, Pergamon Press, Oxford, 1983.
- [Ž] Maja Žuvela: *Zimska termohalina cirkulacija i kvazigeostrofičko strujanje u Jadranu*, Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, 2002.