

## Druga zadaća: Parcijalne diferencijalne jednačbe II

1. [2] Neka je  $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ . Dokažite da je  $T' = 0$  ako i samo ako je  $T$  konstanta.

2. [2+2] Riješite u  $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ :

(a)  $x^n T = 0$ ,  $n \in \mathbf{N}$ .

(b)  $(1 - x^3)^2 T = 1$ .

3. [2+2]

(a) Neka je

$$P := \sum_{k=0}^m a_k \frac{d^k}{dx^k}, \quad a_m \neq 0,$$

obični diferencijalni operator reda  $m$ ,  $m \in \mathbf{N}$ . Dokažite da je  $\Phi = Hf$  elementarno rješenje od  $P$ , pri čemu je  $H$  Heavisideova funkcija, a  $f$  zadovoljava

$$\begin{cases} Pf = 0, & x \in \langle 0, +\infty \rangle, \\ f(0) = \dots = f^{(m-2)}(0) = 0, \\ f^{(m-1)}(0) = \frac{1}{a_m}. \end{cases}$$

(b) Koristeći pripadno elementarno rješenje odredite na  $\mathbf{R}$  formulu za rješenje jednačbe

$$u''' - 2u'' - u' + 2u = f,$$

za proizvoljnu  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ .

4. [2+1] Izračunajte:

(a)  $\chi_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} * \sin$ ,

(b)  $\widehat{\chi_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}} \widehat{\sin}$ .

5. [2] Izračunajte Fourierovu pretvorbu funkcije

$$\frac{x^2}{(x^2 + x + 1)(x + 1)} * e^{-x^2}.$$

6. [3+1] Distribucija  $\text{Pf} \frac{1}{|\mathbf{x}|^2}$ , konačni dio  $\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}$ , definirana je formulom

$$\langle \text{Pf} \frac{1}{|\mathbf{x}|^2}, \varphi \rangle := \int_{|\mathbf{x}| < 1} \frac{\bar{\varphi}(\mathbf{x}) - \bar{\varphi}(0)}{|\mathbf{x}|^2} d\mathbf{x} + \int_{|\mathbf{x}| \geq 1} \frac{\bar{\varphi}(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|^2} d\mathbf{x},$$

gdje je  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$ .

(a) Dokažite da je  $\text{Pf} \frac{1}{|\mathbf{x}|^2}$  parna temperirana distribucija reda  $\leq 1$ .

(b) Pokažite da vrijedi  $|\mathbf{x}|^2 \text{Pf} \frac{1}{|\mathbf{x}|^2} = 1$ .

7. [3] Izračunajte Fourierovu pretvorbu funkcije  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{x}|^2}$ .

Uputa: Prijedite na zarotirani sferični koordinatni sustav.

8. [2+3]

a) Izračunajte Fourierovu pretvorbu funkcije

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2} .$$

b) Koristeći Fourierovu pretvorbu riješite početnu zadaću na  $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$ :

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} , \\ u(0, x) = \frac{\sin^2 x}{x^2} . \end{cases}$$

Provjerite da dobivena funkcija uistinu zadovoljava gornju jednačbu i početni uvjet.

9. [3] Koristeći Fourierovu pretvorbu riješite početnu zadaću na  $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$ :

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} , \\ u(0, x) = e^{-2|x|} , \\ u_t(0, x) = 0 . \end{cases}$$

Provjerite da dobivena funkcija uistinu zadovoljava gornju jednačbu i početne uvjete.

Rješenja u pisanom obliku treba predati na kolokviju 24. svibnja 2013.

*Marko Erceg*