

## Parcijalne diferencijalne jednačbe II - popravni kolokvij

1. [5+5+10] Neka je  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  zadana s

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , \quad x < 0 , \\ x & , \quad x \geq 0 . \end{cases}$$

- Koristeći definiciju distribucije pridružene funkciji, dokažite da je  $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ , te odredite po definiciji  $f'$ .
- Je li  $f'$  funkcija? Odgovor detaljno obrazložite.
- Nadite opće rješenje jednačbe

$$xT = f' ,$$

u prostoru distribucija.

2. [15+10]

- Izračunajte Fourierovu pretvorbu funkcije

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2} .$$

- Koristeći Fourierovu pretvorbu riješite početnu zadaću na  $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$ :

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} , \\ u(0, x) = \frac{\sin^2 x}{x^2} . \end{cases}$$

3. [25] Riješite početno-rubnu zadaću na  $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$ :

$$\begin{cases} u_t = iu_{xx} , \\ u(0, x) = \sin x , \\ u(t, 0) = 0 . \end{cases}$$

4. [30] Distribucija  $\text{Pf} \frac{H(x)}{x}$ , konačni dio  $\frac{H(x)}{x}$ , gdje je  $H(x)$  Heavisideova funkcija, definirana je formulom:

$$\langle \text{Pf} \frac{H(x)}{x}, \varphi \rangle := \int_0^a \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \varphi(0) \ln a ,$$

gdje je  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ ,  $\text{supp } \varphi \subseteq [-a, a]$ .

- Dokažite da gornja definicija ne ovisi o  $a \in \mathbf{R}$ .
- Pokažite da je  $\text{Pf} \frac{H(x)}{x}$  distribucija reda  $\leq 1$ .
- Pokažite da je  $\text{supp Pf} \frac{H(x)}{x} = [0, +\infty)$ .
- Pokažite da vrijedi  $x \text{Pf} \frac{H(x)}{x} = H(x)$ .
- Nadite opće rješenje jednačbe

$$xT' + T = \delta_0 .$$

u prostoru distribucija.

Marko Erceg

13. lipnja 2012.