Odabrana poglavlja Soboljevljevih prostora

ak. god. 2017./2018.

Marko Erceg (PMF-MO, e-mail: `maerceg(at)math.hr`)
Ivan Ivec (Metalurški fakultet, e-mail: `iivec(at)simet.hr`)

Nastava će uglavnom pratiti [AF], i to od poglavlja 3 do poglavlja 7 (prva dva poglavlja su uvodna i to ćemo uglavnom preskočiti), dok će [Br] poslužiti ponekad kao njena alternativa. Referenca [LL] će se uglavnom koristiti na kraju kolegija kad ćemo promatrati neka poopćenja Soboljevljevih prostora (prostori koji se koriste u kvantnoj teoriji).

Literatura:

[AF] R. A. Adams, J. J. F. Fournier: *Sobolev spaces*, Academic Press, 2003.

[Br] H. Brezis: *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, 2011.

[LL] E. H. Lieb, M. Loss: *Analysis*, American Mathematical Society, 1997.

Dodatna literatura:

[AV] N. Antonić, M. vrdoljak: *Mjera i integral*, PMF-Matematički odjel, 2001.

[BIN] O. V. Besov, V. P. Il'in, S. M. Nikol'skiĭ: *Integral representations of functions and imbedding theorems*, Vol. I.–II., V. H. Winston & Sons, 1978–1979.

[Ev] L. C. Evans: *Partial differential equations* (2nd ed.), American Mathematical Society, 2010.

[Ma] V. Maz'ya: *Sobolev spaces: with applications to elliptic partial differential equations* (2nd ed.), Springer, 2011.

[So] S. L. Sobolev: *Some applications of functional analysis in mathematical physics* (3rd ed.), American Mathematical Society, 1991.

[Ta] L. Tartar: *An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces*, Springer, 2007.

[Tr] H. Triebel: *Theory of function spaces. II.*, Birkhäuser Verlag, 1992.

[PDJ2] materijali diplomskog kolegija Parcijalne diferencijalne jednadžbe 2.

($\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ neprazan i otvoren)

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1, \infty\rangle$$

$\left(\|u\|_{L^p(\Omega)} \right)$

$$\|u\|_\infty = \inf \{ K \in \mathbb{R} : |u(x)| \leq K \ (ss) \}$$

$\|u\|_p < \infty$ ... $L^p(\Omega)$, L^p ... Banachovi prostori

<u>Pojam distribucije i slabe derivacije</u>

$\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$ ... test funkcije

$\varphi_n \in C_c^\infty(\Omega)$, $\varphi_n \to \varphi$ ako:

(i) $\exists K \Subset \Omega$ takav da $\operatorname{supp}(\varphi_n - \varphi) \subset K$

(ii) $\partial^\alpha \varphi_n \to \partial^\alpha \varphi$ uniformno na K

Postoji lokalno konveksna topologija na $C_c^\infty(\Omega)$ t.d. linearni funkcional $T : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ je NEPREKIDAN akko $\varphi_n \to \varphi \Rightarrow T(\varphi_n) \to T(\varphi)$

$\mathcal{D}'(\Omega)$ ... dual prostora $\mathcal{D}(\Omega)$ ... skup neprekinutih linearnih funkcionala na $\mathcal{D}(\Omega)$ opskrbljen <u>slabom $*$ topologijom</u>

najslabija topologija uz koju su funkcionali oblika

$F_x(T) = T(x)$, $x \in \mathcal{D}(\Omega)$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$

neprekinuti

$\mathcal{D}'(\Omega)$ ... prostor distribucija

$$u \in L^1_{loc} \longrightarrow T_u(\varphi) = \int_\Omega u(x)\varphi(x)\,dx, \quad \partial^\alpha u = ?$$

$$u \in C^{|\alpha|}(\Omega) \longrightarrow \int_\Omega \partial^\alpha u(x)\,\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u(x)\,\partial^\alpha\varphi(x)\,dx$$

$$\downarrow$$

$$(\partial^\alpha T)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\,T(\partial^\alpha\varphi)$$

Soboljevljevi prostori $W^{m,p}(\Omega)$

$m \in \mathbb{N}$

$$\left.\begin{aligned} \|u\|_{m,p} &= \Big(\sum_{0\le|\alpha|\le m} \|\partial^\alpha u\|_p^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1,\infty\rangle \\ \|u\|_{m,\infty} &= \max_{0\le|\alpha|\le m} \|\partial^\alpha u\|_\infty \end{aligned}\right\} \underline{\text{norme}}$$

$\|u\|_{m,p} < \infty \;\ldots\; W^{m,p}(\Omega)$

Ekvivalentno: $\partial^\alpha u \in L^p(\Omega)$, $0 \le |\alpha| \le m$

$H^{m,p}(\Omega)$... upotpunjenje prostora $\{u \in C^m(\Omega) : \|u\|_{m,p} < \infty\}$ s obzirom na normu $\|\cdot\|_{m,p}$

$W_0^{m,p}(\Omega)$... zatvarač prostora $C_c^\infty(\Omega)$ u $W^{m,p}(\Omega)$

$$W^{0,p} = W_0^{0,p} = L^p \quad (p \in [1,\infty\rangle), \quad W_0^{0,\infty} \neq W^{0,\infty} = L^\infty$$

$$W_0^{m,p} \hookrightarrow W^{m,p} \hookrightarrow L^p$$

Teorem 1. $W^{m,p}$ je Banachov prostor.

Dokaz. (u_n) Cauchyjev u $W^{m,p}$

$\Rightarrow (\partial^\alpha u_n)$ Cauchyjev u L^p

$\underset{(L^p \text{ potpun})}{\Longrightarrow} \exists\, u_\alpha$ t.d. $\partial^\alpha u_n \to u_\alpha$ u L^p

$u_n \to u$ u L^p

Preostaje pokazati: $u_\alpha = \partial^\alpha u$

$$|T_{u_n}(\varphi) - T_u(\varphi)| \leq \int_\Omega |u_n(x) - u(x)||\varphi(x)|\, dx$$

$$\leq \|\varphi\|_{p'} \|u_n - u_n\|_p \to 0$$

Slično: $T_{\partial^\alpha u_n}(\varphi) \to T_{u_\alpha}(\varphi)$

$$T_{u_\alpha}(\varphi) = \lim_n T_{\partial^\alpha u_n}(\varphi) = \lim_n (-1)^{|\alpha|} T_{u_n}(\partial^\alpha \varphi)$$

$$= (-1)^{|\alpha|} T_u(\partial^\alpha \varphi). \quad \text{Q.E.D.}$$

Definirajmo $\quad P : W^{m,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega;\mathbb{C}^N)$ $\quad \left(N = \sum_{k=0}^{m} \binom{k+d-1}{d-1}\right)$

s $\quad P(u) = (u, \partial_{x_1} u, \ldots, \partial_{x_d}^m u)$.

Očito: a) P linearan

b) P izometrija $\quad \left(\begin{aligned} \|(u_1,\ldots,u_N)\|_{L^p(\Omega;\mathbb{C}^N)} &= \left(\sum_{k=1}^{N} \|u_k\|_p^p\right)^{1/p} \quad p\in[1,\infty\rangle \\ &= \max_{k=1,\ldots,N} \|u_k\|_\infty \quad , p=\infty \end{aligned} \right.$

c) $W^{m,p}(\Omega)$ potpun $\Rightarrow$ $P(W^{m,p}(\Omega))$ zatvoren u $L^p(\Omega;\mathbb{C}^N)$

$\Rightarrow \begin{cases} P(W^{m,p}(\Omega)) \text{ Banachov prostor} \\ L^p(\Omega;\mathbb{C}^N) \text{ separabilan} \Rightarrow P(W^{m,p}(\Omega)) \text{ separabilan} \\ L^p(\Omega;\mathbb{C}^N) \text{ refleksivan} \Rightarrow P(W^{m,p}(\Omega)) \text{ refleksivan} \end{cases}$

a, b, c $\Rightarrow$ $W^{m,p}$ izometrički izomorfno s $P(W^{m,p})$

Kako je $L^p(\Omega;\mathbb{C}^N) = \prod_{k=1}^{N} L^p(\Omega)$, to je

- $L^p(\Omega;\mathbb{C}^N)$ separabilan $\iff$ $p\in[1,\infty\rangle$
- $L^p(\Omega;\mathbb{C}^N)$ refleksivan $\iff$ $p\in\langle 1,\infty\rangle$

Konačno zaključujemo:

$$\boxed{\begin{array}{l} W^{m,p}(\Omega) \text{ separabilan za } p\in[1,\infty\rangle \\ W^{m,p}(\Omega) \text{ refleksivan za } p\in\langle 1,\infty\rangle \end{array}}$$

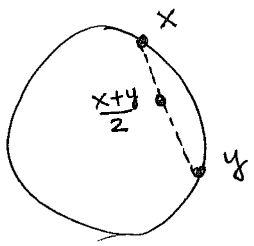
<u>KOROLAR</u>. Za Banachov prostor $W_0^{m,p}(\Omega)$ vrijedi

$$\boxed{\begin{array}{l} W_0^{m,p}(\Omega) \text{ separabilan za } p\in[1,\infty\rangle \\ W_0^{m,p}(\Omega) \text{ refleksivan za } p\in\langle 1,\infty\rangle \end{array}}$$

JEDNOLIKA (UNIFORMNA) KONVEKSNOST [AF, 1.20]

$(X, \|\cdot\|)$ normiran prostor je <u>jednoliko konveksan</u> ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in X,\ \|x\| = \|y\| = 1)\quad \|x-y\| \geq \varepsilon \Rightarrow \left\|\tfrac{x+y}{2}\right\| \leq 1-\delta .$$



Ukoliko su točke na jediničnoj sferi dovoljno udaljene, tada je njihovo polovište „duboko" u unutrašnjosti kugle (jedinične).

Ovo svojstvo je geometrijsko svojstvo norme i nije topološko svojstvo.

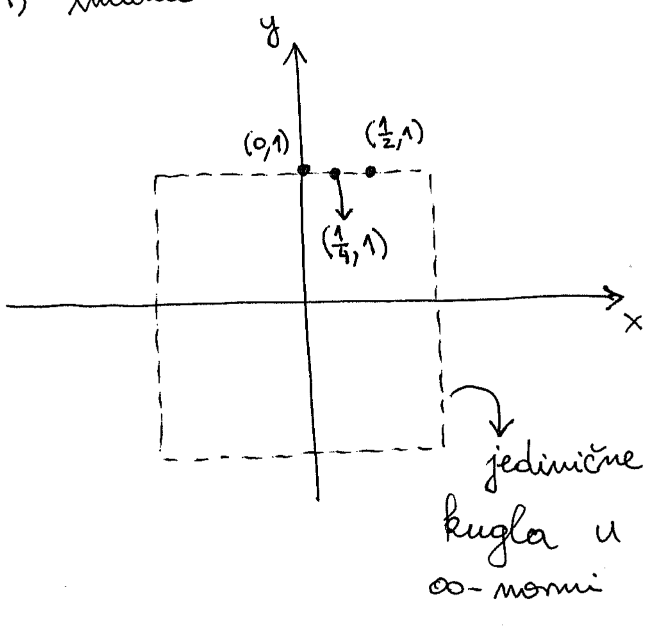
<u>PRIMJER</u>. Znamo da su u $\mathbb{R}^2$ sve norme ekvivalentne, tj. induciraju <u>istu</u> topologiju. Međutim, nisu sve norme takve da je $\mathbb{R}^2$ jednoliko konveksan prostor. Na primjer,

$$\|(x,y)\|_p := \begin{cases} (|x|^p + |y|^p)^{1/p}, & p \in [1, \infty\rangle \\ \max\{|x|, |y|\}, & p = \infty \end{cases} .$$

$(\mathbb{R}^2, |\cdot|_p)$ je jednoliko konveksan za $\underline{p \in \langle 1, \infty\rangle}$.

Za $p = \infty$ i točke $(\frac{1}{2}, 1)$, $(0,1)$ imamo

- $|(\frac{1}{2}, 1)|_\infty = 1 = |(0,1)|_\infty$
- $|(\frac{1}{2}, 1) - (0,1)|_\infty = \frac{1}{2} > 0$
- $\left|\frac{(\frac{1}{2}, 1) + (0,1)}{2}\right|_\infty = 1$



Vrijedi: $L^p(\Omega)$ jednoliko konveksan za $p \in \langle 1, \infty \rangle$.
[AF, 2.39]

$\Rightarrow$ $P(W^{m,p}(\Omega))$ je jednoliko konveksan za $p \in \langle 1, \infty \rangle$

$\Rightarrow$ $W^{m,p}(\Omega)$ —— " —————— —— " ——

Kako je jednoliko konveksan Banachov prostor nužno refleksivan $\underbrace{}_{\text{[AF, 1.21]}}$, ovim alternativno vidimo da je $W^{m,p}$ refleksivan za $p \in \langle 1, \infty \rangle$.

DUALNOST

Oznake:
$$\langle u | v \rangle = \int_\Omega u(x)\, \overline{v(x)}\, dx$$
$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx$$

$(W^{m,p}(\Omega))'$ ... dual prostora $W^{m,p}(\Omega)$

[AF, 1.15] $\Rightarrow$ za $p \in \langle 1, \infty \rangle$ je $(W^{m,p}(\Omega))'$ refleksivan i separabilan

Koristeći izometričku izomorfnost prostora $W^{m,p}(\Omega)$ i $P(W^{m,p}(\Omega))$, možemo detaljnije opisati prostor $(W^{m,p}(\Omega))'$.

TEOREM. Neka je $F \in (W^{m,p}(\Omega))'$, $p \in [1,\infty\rangle$. $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right)$

Tada postoje $f_\alpha \in L^{p'}(\Omega)$, $0 \le |\alpha| \le m$, takve da za svaki $u \in W^{m,p}(\Omega)$ vrijedi

$$\langle F, u\rangle = \sum_{0\le|\alpha|\le m} \int_\Omega f_\alpha(x)\,(\partial^\alpha u)(x)\,dx . \qquad (*)$$

Nadalje,

$$\|F\|_{(W^{m,p}(\Omega))'} = \inf\left\{ \Big(\sum_{0\le|\alpha|\le m} \|f_\alpha\|_{p'}^{p'}\Big)^{\frac{1}{p'}} : f_\alpha \text{ zadovoljavaju } (*) \right\}$$

$$\left(= \inf\left\{ \max_\alpha \|f_\alpha\|_\infty : f_\alpha \text{ zadovoljavaju } (*)\right\},\ p'=\infty \right)$$

Dz. Ranije smo definirali izometrički izomorfizam

$$P : W^{m,p} \longrightarrow P(W^{m,p}) \hookrightarrow L^p(\Omega; \mathbb{C}^N),$$

a inverz

$$P^{-1} : P(W^{m,p}) \longrightarrow W^{m,p}$$

je također izometrija.

Za $\vec{v} \in P(W^{m,p})$ definiramo

$$\langle F^*, \vec{v}\rangle := \langle F, P^{-1}\vec{v}\rangle .$$

P^{-1} izometrija $\Rightarrow F^* \in (P(W^{m,p}))'$ & $\|F^*\|_{(P(W^{m,p}))'} = \|F\|_{(W^{m,p})'}$.

Po Hahn-Banachovom teoremu postoji proširenje $\hat{F} \in (L^p(\Omega;\mathbb{C}^N))'$ funkcionala F^* t.d.

$$\|\hat{F}\|_{(L^p(\Omega;\mathbb{C}^N))'} = \|F^*\|_{(P(W^{m,p}))'} .$$

Kako je $(L^p(\Omega;\mathbb{C}^N))' = L^{p'}(\Omega;\mathbb{C}^N)$, $(p\neq\infty ✓)$

postoje $f_\alpha \in L^{p'}(\Omega)$, $0\leq|\alpha|\leq m$, t.d.

$$\langle \hat{F}, \vec{v}\rangle = \sum_\alpha \langle f_\alpha, v_\alpha\rangle \quad , \quad \vec{v}=(v_\alpha)\in L^p(\Omega;\mathbb{C}^N).$$

Sada za $u\in W^{m,p}(\Omega)$ imamo

$$\begin{aligned}\langle F, u\rangle &= \langle F^*, Pu\rangle \\ &= \langle \hat{F}, Pu\rangle \\ &= \sum_\alpha \langle f_\alpha, \partial^\alpha u\rangle ,\end{aligned}$$

a onda i $\|F\|_{(W^{m,p})'} = \|F^*\|_{(P(W^{m,p}))'} = \|\hat{F}\|_{(L^p(\Omega;\mathbb{C}^N))'}$

$$\overset{[AF,2.44]}{=} \|(f_\alpha)\|_{L^{p'}(\Omega;\mathbb{C}^N)} = \Big(\sum_\alpha \|f_\alpha\|_{p'}^{p'}\Big)^{1/p'}.$$

Neka ~~su~~ sada $g_\alpha \in L^{p'}(\Omega)$, $0\leq|\alpha|\leq m$, proizvoljne t.d. vrijedi $(*)$.

Tada je $\langle \tilde{F}, \vec{v}\rangle := \sum_\alpha \langle g_\alpha, v_\alpha\rangle$, $\vec{v}=(v_\alpha)\in L^p(\Omega;\mathbb{C}^N)$,

proširenje funkcionala F^*, pa onda vrijedi

$$\Big(\sum_\alpha \|f_\alpha\|_{p'}^{p'}\Big)^{1/p'} = \|F^*\| \leqslant \|\tilde{F}\| = \Big(\sum_\alpha \|g_\alpha\|_{p'}^{p'}\Big)^{1/p'},$$

čime smo pokazali

$$\begin{aligned}\|F\|_{(W^{m,p}(\Omega))'} &= \inf\Big\{\|(g_\alpha)\|_{L^{p'}(\Omega;\mathbb{C}^N)} : (g_\alpha) \text{ zadovoljavaju } (*)\Big\} \\ &= \|(f_\alpha)\|_{L^{p'}(\Omega;\mathbb{C}^N)} ,\end{aligned}$$

tj. infimum se postiže.

<u>NAPOMENA</u>. Koristeći jednoliku konveksnost prostora $L^p(\Omega;\mathbb{C}^N)$ i $L^{p'}(\Omega;\mathbb{C}^N)$, $p \in \langle 1,\infty\rangle$, možemo dobiti da je (f_α) iz dokaza prethodnog teorema <u>jedinstven</u>.
U tom slučaju se može reći da je

$$"F = \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha f_\alpha".$$

■

Pogledajmo sada u kojem su odnosu prostori $(W^{m,p})'$ i $\mathcal{D}'$.

$F \in (W^{m,p}(\Omega))' \Rightarrow \exists (f_\alpha)$ t.d. vrijedi (*).
Restringirajmo F na $C_c^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega) \subseteq W^{m,p}(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
\langle T,\varphi\rangle &:= \langle F,\varphi\rangle \\
&= \sum_{0\le|\alpha|\le m} \langle f_\alpha, \partial^\alpha\varphi\rangle \\
&= \sum_{0\le|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} \langle \partial^\alpha f_\alpha, \varphi\rangle
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle T,\varphi\rangle = \sum_{0\le|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} \langle \partial^\alpha T_{f_\alpha}, \varphi\rangle} \; (**) \quad \left(\langle T_{f_\alpha},\varphi\rangle = \langle f_\alpha,\varphi\rangle \right)$$

Istu stvar smo mogli napraviti i za $F \in (W_0^{m,p}(\Omega))'$.

Dakle, funkcionale iz $(W^{m,p}(\Omega))'$ i $(W_0^{m,p}(\Omega))'$ možemo restringirati do distribucija.
Ostaje za provjeriti je li gornje pridruživanje $F \mapsto T$ injektivno, tj. određuje li distribucija (**) jedinstveni funkcional na $W^{m,p}$, odnosno $W_0^{m,p}$.

Kako je $C_c^\infty(\Omega)$ općenito gusto u $W_0^{m,p}(\Omega)$, ali ne i u $W^{m,p}(\Omega)$, moći ćemo jedinstveno proširiti samo do $W_0^{m,p}(\Omega)$.

Konkretno, neka je $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ t.d. $\exists (f_\alpha) \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{C}^N)$

$$T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \langle \partial^\alpha T_{f_\alpha}, \varphi \rangle \quad , \quad \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

$u \in W_0^{m,p}(\Omega) \Rightarrow \exists (\varphi_m)$ u $C_c^\infty(\Omega)$, $\|\varphi_m - u\|_{m,p} \to 0$

$\Rightarrow (T(\varphi_m))$ Cauchyjev niz u $\mathbb{C}$

$F(u) := \lim_m T(\varphi_m)$ (lako se provjeri da definicija ne ovisi o izboru niza (φ_m))

$\Rightarrow F$ linearan i

$$\begin{aligned}
|F(u)| &= \lim_m |T(\varphi_m)| \\
&= \lim_m \Big| \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|} \langle \partial^\alpha T_{f_\alpha}, \varphi_m \rangle \Big| \\
&= \lim_m \Big| \sum_\alpha \langle f_\alpha, \partial^\alpha \varphi_m \rangle \Big| \\
&\leq \lim_m \|\varphi_m\|_{m,p} \|(f_\alpha)\|_{L^{p'}(\Omega;\mathbb{C}^N)} = \|u\|_{m,p} \|(f_\alpha)\|_{L^{p'}(\Omega;\mathbb{C}^N)}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow (W_0^{m,p}(\Omega))'$ je izometrički izomorfan prostoru distribucija koje zadovoljavaju (**)

$(W_0^{m,p}(\Omega))' =: W^{-m,p}(\Omega)$, te vrijedi

$$\|T\|_{-m,p} = \min \left\{ \|(f_\alpha)\|_{L^{p'}(\Omega;\mathbb{C}^N)} : (f_\alpha) \text{ zadovoljava } (**) \right\}$$

distribucija koja zadovoljava (**)