# Matematička teorija računarstva: Zbirka zadataka

Matko Botinčan*

1. svibnja 2007.

## 1 Relacije, uređaji, funkcije

**1.** *Neka su $R$ i $S$ simetrične relacije. Tada je $RS$ simetrična akko $RS = SR$.*

**2.** *Neka su $R$ i $S$ antisimetrične relacije. Tada je $R \cup S$ antisimetrična akko $R \cap S^\tau \subseteq I$.*

**3.** *Neka je $R \subseteq A \times A$ tranzitivna i simetrična. Definiramo $R_1 = \{x \in A \mid \exists y \,.\, xRy\}$ i $R_2 = \{y \in A \mid \exists x \,.\, xRy\}$. Tada $R_1 \cup R_2 = A$ povlači da je $R$ relacija ekvivalencije.*

**4.** *$R$ je relacija ekvivalencije akko $RR^\tau \cup I = R$.*

**5.** *Neka su $R$ i $S$ relacije ekvivalencije nad $A$. Tada vrijedi:*

*(i)* $R^2 = A^2 \Leftrightarrow R = A^2$

*(ii)* $RS = A^2 \Leftrightarrow SR = A^2$

**6.** *Neka su $P$, $Q$ i $R$ relacije nad $A$. Tada $P \subseteq Q$ povlači $PR \subseteq QR$.*

**7.** *Neka su $R$ i $S$ relacije takve da je $R \subseteq S$. Tada vrijedi $R^+ \subseteq S^+$ i $R^* \subseteq S^*$.*

**8.** *Neka je $R$ relacija. Tada vrijedi $(R^*)^* = R^*$.*

**9** (Lema o sendviču)**.** *Neka su $R$ i $S$ relacije takve da je $S \subseteq R \subseteq S^*$. Tada vrijedi $R^* = S^*$.*

**10.** *Dokažite da za relacije $R$ i $S$ vrijedi $(R \cup S)^* = (R^* S^*)^*$.*

**11.** *Neka su $P$ i $Q$ proizvoljne relacije. Dokažite ili opovrgnite: $P^+(P \cup Q)^* = P(P \cup Q)^*$.*

**12.** *Neka su $\leq$ i $<$ standardni uređaji na skupu $\mathbb{N}$.*
*Dokažite da vrijede slijedeće tvrdnje:*

*(i)* $< \circ < \quad \subsetneq \quad <$

*(ii)* $\leq \circ < \quad = \quad <$

*(iii)* $\leq \circ \geq \quad = \quad \mathbb{N}^2$

*Dio zadataka preuzet je iz auditornih vježbi i ispitnih rokova Igora Jelaske i Igora Urbihe.

**13.** *Postoji li za svaki par prirodnih brojeva $(m, n)$ parcijalno uređen skup koji ima točno $m$ minimalnih i $n$ maksimalnih elemenata? Ukoliko je odgovor potvrdan konstruirajte jedan takav skup (za općenite $m$ i $n$).*

**14.** *Neka je $A \neq \emptyset$, te $\varphi\colon A \times A \to A$ funkcija sa slijedećim svojstvima:*

- $\forall x\, \forall y\, .\, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$;
- $\forall x\, .\, \varphi(x, x) = x$;
- $\forall x\, \forall y\, \forall z\, .\, \varphi(x, \varphi(y, z)) = \varphi(\varphi(x, y), z)$.

*Definiramo relaciju $\trianglelefteq \subseteq A \times A$ s $x \trianglelefteq y \Leftrightarrow \varphi(x, y) = x$. Dokažite da je $(A, \trianglelefteq)$ parcijalno uređen skup.*

**15.** *Označimo s $\prec$ relaciju "biti pravi prefix" koja je za $u, v \in S^*$ definirana s $u \prec v \Leftrightarrow \exists w \in S^+$ t.d. $v = u \cdot w$, te neka vrijedi $u \preceq v \Leftrightarrow u \prec v$ ili $u = v$. Tada je $(S^*, \preceq)$ parcijalno uređen skup.*

**16.** *Dokažite da je $(S^*, \leq)$ parcijalno uređen skup, gdje $\leq$ označava relaciju leksikografskog uređaja na $S^*$.*

**17.** *Dokažite da je $(S^*, \leq)$ linearno uređen skup.*

**18.** *Dokažite da je $(S^*, \prec)$ dobro utemeljen skup.*

**19.** *Da li je $(S^*, <)$ dobro uređen skup?*

**20.** *(i) Dokažite da je $(S^n, <)$ dobro uređen skup.*

*(ii) Dokažite da je $(L_n, <)$ dobro uređen skup, gdje je $L_n := \bigcup_{k=0}^{n} S^k$.*

**21.** *U kutiji se nalazi konačno mnogo kuglica na svakoj od kojih je zapisan jedan prirodni broj. Ponavljamo korake koji se sastoje od slijedećih dviju akcija:*

- *iz kutije izvučemo jednu kuglicu; označimo s $k$ broj koji je zapisan na izvučenoj kuglici;*
- *u kutiju stavimo $k$ kuglica na kojima su zapisani brojevi $0, 1, 2, \ldots, k-1$.*

*Dokažite ili opovrgnite: nakon konačno mnogo koraka kutija će biti prazna.*

**22.** *Morrisova 91-funkcija definirana je na slijedeći način:*

$$f(m) = \begin{cases} m - 10, & \textsf{ako je } m > 100 \\ f(f(m + 11)), & \textsf{inače} \end{cases}$$

*Dokažite da vrijedi:*

$$f(m) = \begin{cases} m - 10, & \textsf{ako je } m > 100 \\ 91, & \textsf{inače} \end{cases}$$

**23.** *Funkcija $B\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definirana je na slijedeći način:*

$$\begin{aligned} B(0, y) &= 2 + y \\ B(x + 1, 0) &= \textsf{signum}(x) \\ B(x + 1, y + 1) &= B(x, B(x + 1, y)) \end{aligned}$$

*Provjerite da vrijedi $B(1, y) = 2y$ i $B(2, y) = 2^y$. Čemu je jednako $B(3, y)$?*
*Dokažite da vrijede slijedeće tvrdnje:*

*(i)* $(x,y) \neq (1,0) \Rightarrow B(x,y) > y$

*(ii)* $B(x+1, y+2) \geq B(x+1, y+1)$

*(iii)* $B(x+2, y) \geq 2^y$

**24.** *Neka je* $(R_n)_n$ *niz parcijalnih funkcija* $R_n\colon X \to Y$ *takvih da za svako* $n$ *vrijedi* $R_n \subseteq R_{n+1}$. *Dokažite da je tada* $\bigcup_{n\geq 0} R_n$ *također parcijalna funkcija.*

## 2 Fiksne točke

**25.** *Odredite da li je* $\varphi\colon \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ *monoton operator ako je zadan s:*

*(i)* $\varphi(X) = \begin{cases} X, & \textit{ako je } X \textit{ beskonačan} \\ \emptyset, & \textit{inače} \end{cases}$

*(ii)* $\varphi(X) = \begin{cases} X, & \textit{ako je } X \textit{ beskonačan} \\ X \cup \{|X|\}, & \textit{inače} \end{cases}$

*(iii)* $\varphi(X) = \begin{cases} X, & \textit{ako je } X \textit{ beskonačan} \\ X \setminus \{|X|\}, & \textit{inače} \end{cases}$

*(iv)* $\varphi(X) = \begin{cases} X, & \textit{ako je } X \textit{ konačan} \\ \mathbb{N}, & \textit{inače} \end{cases}$

*U kojim od slučajeva je* $\varphi$ *neprekidan?*

**26.** *Neka je* $\varphi\colon \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(A)$ *monotoni operator. Označimo s* $\varphi'\colon \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(A)$ *tzv. dualni operator operatora* $\varphi$ *definiran s* $\varphi'(X) := \varphi(X^c)^c$. *Dokažite da vrijede slijedeće tvrdnje:*

*(i)* *Dualni operator* $\varphi'$ *je monoton*

*(ii)* $\mu(\varphi) = \nu(\varphi')^c$
$\nu(\varphi) = \mu(\varphi')^c$

*** 27.** *Neka je* $\varphi\colon \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(A)$ *monotoni operator koji je bijekcija. Dokažite ili opovrgnite da je tada i operator* $\varphi^{-1}\colon \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(A)$ *također monoton?*

**28.** *Odredite fiksnu točku operatora* $\varphi\colon \mathscr{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \to \mathscr{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ *definiranog na slijedeći način:*

$$\begin{aligned} \varphi(X) &= \{(n, m_1+m_2) \mid n \geq 2 \textit{ i } (n-1, m_1), (n-2, m_2) \in X\} \\ &\quad \cup \{(0,0),(1,1)\} \end{aligned}$$

*Da li je fiksna točka jedinstvena?*

**29.** *Odredite da li je operator* $f\colon \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ *neprekidan ako je zadan s:*

*(i)* $f(X) = \begin{cases} \emptyset, & \textit{ako je } X = \emptyset \\ X - \min X, & \textit{ako je } \min X > 0 \\ 3X + 1, & \textit{ako je } \min X = 0 \end{cases}$

*(ii)* $f(X) = \begin{cases} X - 1, & \textit{ako je } 0 \notin X \\ X \setminus \{0\}, & \textit{ako je } 0 \in X \end{cases}$

$$(iii)\ \ f(X)=\begin{cases}\{1\}, & \textsf{ako je } X=\emptyset\\ X\cup\{\max X+1\}, & \textsf{ako je } X \textsf{ konačan}\\ X, & \textsf{inače}\end{cases}$$

$$(iv)\ \ f(X)=\begin{cases}X\cup\{\max X+1\}, & \textsf{ako je } 0\in X\\ X\cup\{\min X-1\}, & \textsf{ako je } 0\notin X\end{cases}$$

$$(v)\ \ f(X)=\begin{cases}\emptyset, & \textsf{ako je } X=\emptyset\\ X\cup\{\min X+1\}, & \textsf{ako je } |X|<\infty \textsf{ i } X\neq\emptyset\\ 2\mathbb{N}\cup X, & \textsf{ako je } |X\cap 2\mathbb{N}|=\infty \textsf{ i } |X\setminus 2\mathbb{N}|<\infty\\ (2\mathbb{N}+1)\cup X, & \textsf{ako je } |X\cap 2\mathbb{N}|<\infty \textsf{ i } |X\setminus 2\mathbb{N}|=\infty\\ \mathbb{N}, & \textsf{inače}\end{cases}$$

**30.** *Neka je $a\in\mathbb{N}$. Odredite da li je operator $f_a\colon \mathscr{P}(\mathbb{N})\to\mathscr{P}(\mathbb{N})$ definiran s*

$$f_a(X)=\begin{cases}X, & \textsf{ako } a\notin X\\ \mathbb{N}\setminus X, & \textsf{ako } a\in X\end{cases}$$

*neprekidan?*

**31.** *Neka je $a\in\mathbb{N}$. Odredite da li je operator $f_a\colon \mathscr{P}(\mathbb{N})\to\mathscr{P}(\mathbb{N})$ definiran s*

$$f_a(X)=\{\left\lfloor\frac{x}{a}\right\rfloor \mid x\in X\}$$

*neprekidan?*

**32.** *Neka je $f\colon \mathscr{P}(A)\to\mathscr{P}(B)$ i $g\colon \mathscr{P}(B)\to\mathscr{P}(C)$ neprekidni operatori. Dokažite da je njihova kompozicija $g\circ f\colon \mathscr{P}(A)\to\mathscr{P}(C)$ također neprekidni operator.*

**33.** *Neka je operator $f\colon \mathscr{P}(\mathbb{N})\to\mathscr{P}(\mathbb{N})$ dan s*

$$f(S)=\{g(x)\mid x\in S\},$$

*pri čemu je $g\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ proizvoljna funkcija. Da li je $f$ neprekidan? Ako jest, odredite (najmanju) fiksnu točku od $f$.*

**34.** *Neka je $f\colon \mathscr{P}(\mathbb{N})\to\mathscr{P}(\mathbb{N})$ operator definiran s $f(X):=\{\varphi(x)\mid x\in X\}$, pri čemu je funkcija $\varphi\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ dana s*

$$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x, & \textsf{ako je } x \textsf{ paran}\\ 3x+1, & \textsf{ako je } x \textsf{ neparan}\end{cases}.$$

*Dokažite da je $f$ neprekidan, te odredite $f$-zatvorenje skupa $\{1,3\}$.*

**35.** *Neka je $f\colon \mathscr{P}(\mathbb{N})\to\mathscr{P}(\mathbb{N})$ operator definiran s $f(X):=\{\varphi(x)\mid x\in X\}$, pri čemu je funkcija $\varphi\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ dana s*

$$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{x}{3}, & \textsf{ako je } x\in 3\mathbb{N}\\ x, & \textsf{ako je } x\in 3\mathbb{N}+1\\ 2x, & \textsf{ako je } x\in 3\mathbb{N}+2\end{cases}.$$

*Dokažite da je $f$ neprekidan, te odredite $f$-zatvorenje skupova $\{1,2,3\}$ i $\mathbb{N}$.*

**36.** *Neka je operator* $f\colon \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ *zadan s*

$$f(X) = X + X,$$

*pri čemu je za* $A, B \subseteq \mathbb{N}$, $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. *Dokažite da je* $f$ *neprekidan i odredite* $f$*-zatvorenje skupa* $\{2, 5\}$.

**37.** *Neka je* $A \neq \emptyset$, *te neka je operator* $f$ *definiran s*

$$f(X) = A \times X.$$

*Dokažite da je* $f$ *neprekidan, te odredite* $f$*-zatvorenje skupa* $B \subseteq A$.

**38.** *Neka je* $A \neq \emptyset$, *te neka je operator* $\varphi$ *zadan s*

$$\varphi(X) = A + X \times X,$$

*gdje* $+$ *označava disjunktnu uniju. Odredite i opišite (najmanju) fiksnu točku od* $\varphi$.

**39.** *Za koje skupove* $A$ *i* $B$ *je operator* $\varphi$ *dan s*

$$\varphi(X) = A + X^B$$

*neprekidan? (*$X^B$ *označava* $B \to X$, *tj. skup svih funkcija s* $B$ *u* $X$*). Za one* $A$ *i* $B$ *za koje je* $\varphi$ *neprekidan odredite i opišite (najmanju) fiksnu točku od* $\varphi$.

**40.** *Označimo s* $\mathbb{P}_2$ *skup svih polinoma sa cjelobrojnim koeficijentima stupnja* $\leq 2$. *Operator* $f\colon \mathscr{P}(\mathbb{P}_2) \to \mathscr{P}(\mathbb{P}_2)$ *dan je s* $f(X) = \{\Phi(p) \mid p \in X\}$, *pri čemu* $\Phi\colon \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ *djeluje na slijedeći način:*

$$\Phi(p)(x) = \begin{cases} p'(x), & \text{ako je } deg(p) \neq 0 \\ p(x) \cdot x^2, & \text{ako je } deg(p) = 0 \end{cases}.$$

*Dokažite da je* $f$ *neprekidan, te odredite* $f$*-zatvorenje skupa* $\{x\}$.

## 3 Formalni jezici

**41.** *Neka su* $L, L_1, L_2, L_3, L_4 \subseteq \Sigma^*$ *jezici. Dokažite da tada vrijede slijedeće tvrdnje:*

*(i)* $L_1 \subseteq L_2 \wedge L_3 \subseteq L_4 \Rightarrow L_1 \cdot L_3 \subseteq L_2 \cdot L_4$

*(ii)* $L_1 \subseteq L_2 \Rightarrow L_1^* \subseteq L_2^*$

*(iii)* $L^* = L^+ \cup \{\varepsilon\}$

*(iv)* $L^+ = L \cdot L^*$

*(v)* $(L^*)^* = L^*$

*(vi)* $L_1 \subseteq L_2 \subseteq L_1^* \Rightarrow L_1^* = L_2^*$ *(lema o sendviču)*

**42.** *Napišite regularne izraze nad alfabetom* $\Sigma = \{0, 1\}$ *za slijedeće jezike:*

*(i)* $\{w \mid w \text{ sadrži točno jedan simbol } 1\}$

*(ii)* $\{w \mid w \text{ sadrži barem jedan simbol } 1\}$

*(iii)* $\{w \mid w \text{ sadrži 001 kao podstring}\}$

*(iv)* $\{w \mid w \text{ je parne duljine}\}$

*(v)* $\{w \mid |w| \text{ je višekratnik od } k \in \mathbb{N}\}$

*(vi)* $\{w \mid w \text{ počinje i završava istim simbolom}\}$

*(vii)* $\{w \mid w \text{ ne sadrži dvije uzastopne jedinice}\}$

**43.** *Napišite regularni izraz koji opisuje jezik dobro formiranih decimalnih numeričkih konstanti sa ili bez predznaka.*
*Primjeri riječi iz ovog jezika:* `42`, `3.14159`, `+5.`, `-0.01`.

**44.** *Dokažite da vrijedi:*

*(i)* $a(a+ba)^* = (ab+a)^*a$

*(ii)* $b^*(a+bb)^* = (b+\varepsilon)(a+bb)^*$

*(iii)* $(a^*b^*)^* = (a+b)^*$

*(iv)* $(a^+ + b^*)(a^* + b^+) = a^+b^+ + b^*a^*$

*(v)* $(aab^* + b^+ + b^+aa)^* = (aa+b)^+$

**45.** *Riješite jezičnu jednadžbu:*

$$x = 1x + 0x + 1$$

**46.** *Odredite jezike $x$ i $y$ takve da vrijedi:*

$$\begin{aligned} x &= 1x + 0y + 1 \\ y &= 0x + 1y + 0 \end{aligned}$$

**47.** *Riješite sustav jezičnih jednadžbi:*

$$\begin{aligned} L_1 &= (a+b)L_1 + (a+b)L_2 + a \\ L_2 &= (aa)^*L_1 + (bb)^*L_2 + b \end{aligned}$$

**48.** *Odredite jezike $x$, $y$ i $z$ takve da vrijedi:*

$$\begin{aligned} x &= 1y + 0z + 1 \\ y &= 0y + 1z + 0 \\ z &= 1z + 0y + 1 \end{aligned}$$

**49.** *Odredite sve različite reziduale u slijedećim jezicima:*

*(i)* $L = (a+b)^*$

*(ii)* $L = (a+bb)^*$

*(iii)* $L = (a+b)^*ab(a+b)^*$

*(iv)* $L = a(a+b)^*b(a+b)^*c$

**50.** *Korištenjem teorema o rezidualima dokažite da jezik* $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ *nije regularan.*

**51.** *Da li je jezik* $L = \{a^m b^n \mid 0 \leq m < n\}$ *regularan?*

**52.** *Da li je jezik* $L = \{a^m b^{m^2} \mid m \geq 0\}$ *regularan?*

# 4 Konačni automati

**53.** *Nađite* **DKA** *nad* $\Sigma = \{a, b\}$ *koji prepoznaju slijedeće jezike:*

*(i)* $\{w \mid |w| \text{ je paran}\}$;

*(ii)* $\{w \mid |w| \equiv 1 \ (\mathit{mod}\ 4)\}$;

*(iii)* $\{w \mid |w| < 3\}$;

*(iv)* $a^*b^*$;

*(v)* $(a+b)^*aba(a+b)^*$.

**54.** *Neka je* $n \geq 2$ *i* $0 \leq r < n$. *Nađite* **DKA** *nad* $\Sigma = \{a, b\}$ *koji prepoznaje jezik* $L = \{w \mid |w| \equiv r \ (\mathit{mod}\ n)\}$.

**55.** *Nađite* **DKA** *nad* $\Sigma = \{0, 1\}$ *koji prepoznaje jezik* $L = \{w \mid w \text{ ne sadrži uzastopnih jedinica}\}$.

**56.** *Nađite* **DKA** *nad* $\Sigma = \{0, \ldots, 9\}$ *koji prepoznaje jezik* $L = \{w \mid \text{suma znamenaka od } w \text{ je djeljiva s } 4\}$.

**57.** *Nađite* **DKA** *nad* $\Sigma = \{a, b, c\}$ *koji prepoznaje jezik* $L = \{w \mid |w|_a + |w|_b \equiv |w|_c \ (\mathit{mod}\ 4)\}$.

**58.** *Odredite* **DKA** *nad* $\Sigma = \{a, b\}$ *koji prepoznaje jezik* $L = \{w \in \Sigma^* \mid \neg(|w| \equiv 1 \ (\mathit{mod}\ 4))\}$.

**59.** *Odredite* **DKA** *nad* $\Sigma = \{a, b\}$ *koji prepoznaju slijedeće jezike:*

*(i)* $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \text{ paran i } |w|_b \text{ neparan}\}$;

*(ii)* $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \text{ paran ili } |w|_b \text{ neparan}\}$.

**60.** *Neka su dani jezici* $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w|_0 \equiv 1 \ (\mathit{mod}\ 3)\}$ *i* $M = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w|_1 \equiv 2 \ (\mathit{mod}\ 3)\}$. *Konstruirajte* **DKA** *koji prepoznaju jezike* $L \cap M$ *i* $L \cup M$.

**61.** *Konstruirajte* **DKA** *nad* $\Sigma = \{a, b\}$ *koji prepoznaje jezik* $L = \{a^k b^l \mid k - l \equiv 2 \ (\mathit{mod}\ 3)\} \cup \{a^k b^l \mid k - l \equiv 1 \ (\mathit{mod}\ 2)\}$.

**62.** *Odredite* **NKA** *i* **DKA** *nad* $\Sigma = \{0, 1\}$ *koji prepoznaje jezik* $L = \{w \mid \text{treći simbol s kraja riječi } w \text{ je } 1\}$.

**63.** *Pokažite da postoji* **NKA** *s* $n+1$ *stanja koji prepoznaje jezik* $(0+1)^*1(0+1)^{n-1}$ $(n \geq 1)$. *Pokažite da svaki* **DKA** *koji prepoznaje isti jezik mora imati najmanje* $2^n$ *stanja.*

**64.** *Odredite* **NKA** *nad* $\Sigma = \{a, b\}$ *koji prepoznaju slijedeće jezike:*

*(i)* $(a^2 + ab + b^2)(a+b)^*$;

*(ii)* $(a+b)^*(a^2 + ab + b^2)$;

*(iii)* $(a+b)^*(aaa+bbb)(a+b)^*$;

*(iv)* $(a^2+ba+b^2+ba^2+b^2a)^*$;

*(v)* $((b^2)^*(a^2b+ba))^*$.

**65.** *Odredite* **NKA**$_\varepsilon$ *nad* $\Sigma = \{0\}$ *koji prepoznaje jezik* $L = \{w \mid |w|$ *je djeljiv s 2 ili s 3* $\}$.

**66.** *Neka su* $\mathcal{A}_1 = (Q_1, Q_{01}, \delta_1, F_1)$ *i* $\mathcal{A}_2 = (Q_2, Q_{02}, \delta_2, F_2)$ *dva* **NKA**$_\varepsilon$. *Konstruirajte* **NKA**$_\varepsilon$ $\mathcal{A}$ *takav da vrijedi:*

*(i)* $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}_1) \cup L(\mathcal{A}_2)$;

*(ii)* $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}_1) \cdot L(\mathcal{A}_2)$;

*(iii)* $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}_1)^*$.

**67.** *Odredite* **NKA**$_\varepsilon$ *nad* $\Sigma = \{a, b\}$ *koji prepoznaju slijedeće jezike:*

*(i)* $(a^2)^*(b^3)^*$;

*(ii)* $(a(ab)^*b)^*$;

*(iii)* $(a^2b^* + b^2a^*)(ab+ba)$.

**68.** *Za jezik* $L \subseteq \Sigma^*$ *neka je* $\mathsf{rev}(L) := \{\mathsf{rev}(w) \mid w \in L\}$, *pri čemu je za* $w = w_1 \ldots w_n$ $(w_i \in \Sigma^*)$, $\mathsf{rev}(w)$ *definiran kao riječ* $w_n \ldots w_1$ $(\mathsf{rev}(\varepsilon) = \varepsilon)$. *Dokažite da ako je* $L$ *regularan jezik, onda je i* $\mathsf{rev}(L)$ *također regularan.*

*** 69.** *Neka je* $\mathcal{A} = (Q, Q_0, \delta, F)$ **NKA** *nad alfabetom* $\Sigma$. *Kažemo da je stanje* $s \in Q$ *dostiživo ukoliko postoji riječ* $x \in \Sigma^*$ *takva da postoji izračunavanje od* $\mathcal{A}$ *na* $x$ *koje počinje u nekom od stanja iz* $Q_0$, *a završava u stanju* $s$. $\mathcal{A}$ *je dostiživ ako je svako stanje od* $\mathcal{A}$ *dostiživo. Kažemo da je stanje* $s \in Q$ *kodostiživo ukoliko postoji riječ* $x \in \Sigma^*$ *takva da postoji izračunavanje od* $\mathcal{A}$ *na* $x$ *koje počinje u stanju* $s$, *te sadrži neko od stanja iz* $F$. $\mathcal{A}$ *je kodostiživ ako je svako stanje od* $\mathcal{A}$ *kodostiživo. Kažemo da* $\mathcal{A}$ *ima svojstvo* $\heartsuit$ *ukoliko je* $\mathcal{A}$ *dostiživ i kodostiživ. Dokažite da za svaki regularni jezik* $L \subseteq \Sigma^*$ *postoji automat* $\mathcal{A}$ *sa svojstvom* $\heartsuit$ *koji prepoznaje* $L$.

*** 70.** *Za jezik* $L \subseteq \Sigma^*$ *označimo s* $\mathsf{prefiks}(L)$, $\mathsf{sufiks}(L)$ *i* $\mathsf{faktor}(L)$ *jezike koji predstavljaju prefikse svih riječi iz* $L$, *sufikse svih riječi iz* $L$, *te faktore svih riječi iz* $L$, *respektivno (*$y$ *nazivamo faktorom riječi* $w$ *ako postoje* $x$ *i* $z$ *takvi da je* $w = xyz$*). Dokažite da ako je* $L$ *regularan jezik, onda su i* $\mathsf{prefiks}(L)$, $\mathsf{sufiks}(L)$ *i* $\mathsf{faktor}(L)$ *također regularni jezici.*

**71.** *Odredite minimalne* **DKA** *nad* $\Sigma = \{a, b\}$ *koji prepoznaju slijedeće jezike:*

*(i)* $\{w \mid |w|_a \text{ neparan, a } |w|_b \text{ paran}\}$;

*(ii)* $(a^+b + b^*)^*(b^* + a^+)$;

*(iii)* $(a^*b + a^+b^*)^+$;

*(iv)* $(ab^* + b^+)^*$;

*(v)* $(a+b)^*ab$;

*(vi)* $(a+b)^*a(a+b)$.

**72.** *Odredite minimalni* **DKA** *nad* $\Sigma = \{a, b, c\}$ *koji prepoznaje jezik* $L = a^*(bb)^*(cc)^* + a^*b(bb)^*(cc)^*c$.

**73.** *Odredite minimalni* **DKA** *nad* $\Sigma = \{a, b, c\}$ *koji prepoznaje komplement jezika* $L = ((aa+b)^* + c)^*$.

**74.** *Da li je jezik* $L = \{w \in (a+b)^* \mid \text{predzadnji simbol od } w \text{ je } a\}$ *regularan? Odredite sve reziduale tog jezika.*

**75.** *Provjerite jesu li slijedeći jezici regularni:*

*(i)* $\{0^n1^n \mid n \geq 0\}$;

*(ii)* $\{w \in (0+1)^* \mid w \text{ ima jednak broj } 0 \text{ i } 1\}$;

*(iii)* $\{w \cdot w \mid w \in (0+1)^*\}$;

*(iv)* $\{0^i1^j \mid i > j\}$;

*(v)* $\{1^{n^2} \mid n \geq 0\}$;

*(vi)* $\{1^p \mid p \text{ prost}\}$;

*(vii)* $\{a^{2^n} \mid n \geq 0\}$.

*(viii)* $\{w \in (a+b)^* \mid |w|_a = 2|w|_b\}$;

*(ix)* $\{w \in (a+b)^* \mid |w|_a < |w|_b\}$.

**76.** *Pokažite da jezik* $L = \{a^ib^jc^k \mid i, j, k \geq 0, \text{ ako } i = 1 \text{ onda } j = k\}$ *zadovoljava uvjete leme o pumpanju iako nije regularan.*

**77.** *Neka je* $\mathcal{A}$ **DKA** *s* $n$ *stanja koji prepoznaje konačan jezik* $L$. *Dokažite da za svaku riječ* $w \in L$ *vrijedi* $|w| < n$.

*** 78.** *Dokažite da je jezik* $L \subseteq \Sigma^*$ *regularan ako i samo ako postoji* $n > 0$ *takav da za sve* $w \in \Sigma^*$, $|w| \geq n$ *postoje* $x, y, z \in \Sigma^*$ *sa slijedećim svojstvima:*

- $w = xyz$;
- $y \neq \varepsilon$;
- $\forall i \geq 0$ *i* $\forall v \in \Sigma^*$ *vrijedi* $wv \in L \Leftrightarrow xy^izv \in L$.

# 5 Gramatike

**79.** *Odredite koje jezike generiraju slijedeće* **DL** *gramatike:*

*(i)* $S \to aS \mid bS \mid \varepsilon$

*(ii)* $S \to 1A \mid 0S \mid 0$
$A \to 1A \mid 1$

*(iii)* $S \to 1A \mid 0B \mid 1$
$A \to 0A \mid 1B \mid 0$
$B \to 1B \mid 0A \mid 1$

*(iv)* $S \to aA \mid bS \mid bB \mid b \mid bC$
$A \to aA \mid aS$
$B \to aS \mid bB$
$C \to a$

**80.** *Odredite* **DL** *gramatike koje generiraju slijedeće jezike::*

*(i)* $L = \{w \in \{0,1\}^*$ *t.d. u* $w$ *se ne pojavljuju dvije uzastopne jedinice* $\}$;

*(ii)* $L = \{w \mid w$ *je dekadski zapis prirodnog broja djeljivog s 3* $\}$;

*(iii)* $L = ((a+bb)^* + c)^*$.

**81.** *Nađite* **KS** *gramatiku koja generira jezik* $L = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\} \cup \{1^n 0^n \mid n \geq 0\}$.

**82.** *Nađite* **KS** *gramatike koje generiraju slijedeće jezike:*

*(i)* $L_1 = \{a^n b \mid n \geq 1\}$

*(ii)* $L_2 = \{1^{2n} 00 \mid n \geq 1\}$

*(iii)* $L_1 L_2$

**83.** *Odredite* **KS** *gramatike koje generiraju slijedeće jezike:*

*(i)* $L = \{(ac)^n (bc)^{2n} \mid n \geq 1\}^*$;

*(ii)* $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w$ *ima dvostruko više* $a$*-ova nego* $b$*-ova*$\}$;

*(iii)* $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}^c$;

*(iv)* $L = \{x\#w \mid x^\tau$ *je podriječ od* $w,\ x, w \in \{0,1\}^*\}$;

*(v)* $L = \{x_1\#x_2\#\dots\#x_k \mid k \geq 1,\ x_i \in \{a,b\}^*,$ *te za neke* $i$ *i* $j$, $x_i = x_j^\tau\}$.

**84.** *Dokažite da slijedeća gramatika nije jednoznačna:*
$E \to N \mid E+E \mid E*E \mid (E)$
$N \to 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid \dots$
*Pronađite jednoznačnu gramatiku koja generira isti jezik.*

**85.** *Gramatika* $\mathcal{G}$ *zadana je slijedećim produkcijama:*
$S \to$ **if** $C$ **then** $S$ **else** $S \mid$ **if** $C$ **then** $S \mid a \mid b$
$C \to p \mid q$
*Dokažite da je* $\mathcal{G}$ *višeznačna, te pronađite jednoznačnu gramatiku za* $L(\mathcal{G})$.

**86.** *Dokažite da je kontekstno slobodan jezik* $L = \{a^i b^j c^k \mid i,j,k \geq 0,\ i = j$ *ili* $j = k\}$ *inherentno višeznačan.*

**87.** *Odredite jesu li slijedeći jezici kontekstno slobodni:*

*(i)* $L = \{w\#w^\tau\# \mid w \in \{0,1\}^+\}$;

*(ii)* $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w|_0 = |w|_1\}$;

*(iii)* $L = \{xy \mid x, y \in \{0,1\}^*,\ |x| = |y|\}$;

*(iv)* $L = \{x\#y \mid x, y \in \{0,1\}^*,\ x \neq y\}$;

*(v)* $\{0^n\#0^{2n}\#0^{3n} \mid n \geq 0\}$;

*(vi)* $\{x\#w \mid x$ *je podriječ od* $w,\ x, w \in \{a,b\}^*\}$;

*(vii)* $\{x_1\#x_2\#\ldots\#x_k \mid k \geq 2,\ x_i \in \{0,1\}^*,$ *te za neke* $i \neq j,\ x_i = x_j\}$;

*(vii)* $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$;

*(viii)* $L = \{a^i b^j c^k \mid 0 \leq i \leq j \leq k\}$;

*(ix)* $L = \{w \cdot w \mid w \in \{0,1\}^*\}$;

*(x)* $L = \{1^{F_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, *gdje je* $F_n$ *n-ti Fibonaccijev broj;*

*(xi)* $L = \{a^p \mid p$ *prost broj*$\}$

**88.** *Nađite (kontekstno zavisnu) gramatiku koja generira jezik* $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$.

*** 89.** *Dokažite ili opovrgnite: svaki jezik sa svojstvom da je svaki njegov podskup kontekstno slobodan je nužno konačan.*

*** 90.** *Nađite gramatiku koja generira jezik* $L = \{a^{k^2} \mid k \geq 0\}$.
*(Hint:* $k^2 = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1)$*).*

# 6 Potisni automati

**91.** *Odredite* **PDA** *koji prepoznaje jezik dobro sparenih zagrada (nad alfabetom* $\Sigma = \{(,)\}$*).*

**92.** *Odredite* **PDA** *nad alfabetom* $X \cup \{\#\}$ *koji prepoznaje jezik* $L = \{w\#w^\tau \mid w \in X^*\}$.

**93.** *Odredite* **PDA** *nad alfabetom* $X$ *koji prepoznaje jezik* $L = \{ww^\tau \mid w \in X^*\}$.

**94.** *Odredite* **PDA** *koji prepoznaje jezik* $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = 2|w|_b\}$.

**95.** *Odredite* **PDA** *koji prepoznaje jezik* $L = \{a^m b^n \mid m \neq n\}$.

**96.** *Odredite* **PDA** *koji prepoznaje jezik* $L = \{(01)^n \mid n \geq 1\}$.

**97.** *Odredite* **PDA** *koji prepoznaje jezik* $L = \{w \in (0+1)^* \mid |w|_0 = |w|_1\}$.

**98.** *Odredite* **PDA** *koji prepoznaje jezik* $L = \{w \in (a+b)^* \mid 2|w|_a = 3|w|_b\}$.

## 7 Turingovi strojevi

**99.** *Konstruirajte Turingov stroj koji prepoznaje jezik* $L = \{x^{2n} \mid n > 0\}$. *Na početku rada stroja glava je pozicionirana na najljevijem simbolu* $x$.

**100.** *Na traci se nalazi nalazi zapisan broj* $n$ *u sustavu s bazom 5. Konstruirajte Turingov stroj koji pronalazi ostatak pri dijeljenju broja* $n$ *brojem 2. Na početku rada stroja glava je pozicionirana na najznačajnijoj znamenci broja.*

**101.** *Na traci se nalazi* $n$*-teroznamenkasti broj zapisan u sustavu s bazom 8. Konstruirajte Turingov stroj koji broj na traci množi s 42, te mu dodaje broj 101. Na početku rada stroja glava je pozicionirana na najznačajnijoj znamenci broja.*

**102.** *(i) Konstruirajte Turingov stroj koji računa sljedbenika broja na traci zapisanog u binarnom sustavu. Glava stroja na početku rada pozicionirana je na najznačajnijoj znamenci broja.*

*(ii) Odredite izračunavanje stroja na ulazu 11011.*

*(iii) Odredite izračunavanje stroja na ulazu 11111.*

**103.** *(i) Konstruirajte Turingov stroj koji odlučuje jezik* $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ je palindrom}\}$. *Glava stroja na početku rada pozicionirana je na najljevijem simbolu.*

*(ii) Odredite izračunavanje stroja na ulazu 0010.*

*(iii) Odredite izračunavanje stroja na ulazu 101.*

**104.** *Konstruirajte Turingove strojeve koji odlučuju slijedeće jezike nad alfabetom* $\{0,1\}$:

*(i)* $L = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$;

*(ii)* $L = \{w \mid w \text{ sadrži jednak broj 0 i 1}\}$;

*(iii)* $L = \{w \mid w \text{ sadrži dvostruko više 0 od 1}\}$;

*(iv)* $L = \{w \mid w \text{ ne sadrži dvostruko više 0 od 1}\}$.

**105.** *Neka je* $k$-**PDA** *potisni automat koji ima* $k$ *stogova. Primjerice,* $0$-**PDA** *je (nedeterministički) konačni automat, a* $1$-**PDA** *"obični" potisni automat.*
*Označimo također s* $k$-**PDA** *pripadnu klasu jezika koje prepoznaje neki* $k$-**PDA**. *Primjerice, znamo da vrijedi* $0$-**PDA** $\subsetneq$ $1$-**PDA**.

*Dokažite da vrijede slijedeće tvrdnje:*

*(i)* $1$-**PDA** $\subsetneq$ $2$-**PDA**

*(ii)* $2$-**PDA** $=$ $3$-**PDA**

**106.** *Dokažite da je klasa odlučivih jezika* **R** *zatvorena na slijedeće operacije:*

*(i) uniju*

*(ii) presjek*

*(iii)* *komplementiranje*

*(iv)* *konkatenaciju*

*(v)* *iteraciju*

**107.** *Dokažite da je klasa rekurzivno prebrojivih jezika* **RE** *zatvorena na slijedeće operacije:*

*(i)* *uniju*

*(ii)* *presjek*

*(iii)* *konkatenaciju*

*(iv)* *iteraciju*

**108.** *Odredite koju klasu jezika prepoznaju slijedeći formalni strojevi:*

*(i)* *Turingovi strojevi čija tranzicijska funkcija ima oblik* $\delta\colon Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{D\}$

*(ii)* *Turingovi strojevi čija tranzicijska funkcija ima oblik* $\delta\colon Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{D, S\}$

*(iii)* *Turingovi strojevi čija tranzicijska funkcija ima oblik* $\delta\colon Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{D, RESET\}$*, pri čemu ako je* $\delta(q, a) = (q', b, RESET)$*, onda kada se stroj nalazi u stanju* $q$ *i čita simbol* $a$ *na traci, prelazi u stanje* $q'$*, zapisuje simbol* $b$ *na traku, te glavu pomiče na najljeviju poziciju trake.*

## 8 Odlučivost i neodlučivost

**109.** *Dokažite da je jezik* $A_{\textsf{DKA}} = \{< \mathcal{A}, w >|\ \mathcal{A}\ \textsf{\textit{je}}\ \textsf{\textbf{DKA}}\ \textsf{\textit{nad}}\ \Sigma\ \textsf{\textit{t.d.}}\ \mathcal{A}\ \textsf{\textit{prihvaća}}\ w\}$ *odlučiv.*

**110.** *Dokažite da je jezik* $A_{\textsf{NKA}} = \{< \mathcal{A}, w >|\ \mathcal{A}\ \textsf{\textit{je}}\ \textsf{\textbf{NKA}}\ \textsf{\textit{nad}}\ \Sigma\ \textsf{\textit{t.d.}}\ \mathcal{A}\ \textsf{\textit{prihvaća}}\ w\}$ *odlučiv.*

**111.** *Dokažite da je jezik* $A_{\textsf{RegEx}} = \{< R, w >|\ R\ \textsf{\textit{je}}\ \textsf{\textbf{RegEx}}\ \textsf{\textit{nad}}\ \Sigma\ \textsf{\textit{t.d.}}\ R\ \textsf{\textit{generira}}\ w\}$ *odlučiv.*

**112.** *Dokažite da je jezik* $E_{\textsf{DKA}} = \{< \mathcal{A} >|\ \mathcal{A}\ \textsf{\textit{je}}\ \textsf{\textbf{DKA}}\ \textsf{\textit{nad}}\ \Sigma\ \textsf{\textit{t.d.}}\ L(\mathcal{A}) = \emptyset\}$ *odlučiv.*

**113.** *Dokažite da je jezik* $EQ_{\textsf{DKA}} = \{< \mathcal{A}, \mathcal{B} >|\ \mathcal{A}\ \textsf{\textit{i}}\ \mathcal{B}\ \textsf{\textit{su}}\ \textsf{\textbf{DKA}}\textsf{\textit{-ovi t.d.}}\ L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})\}$ *odlučiv.*

**114.** *Dokažite da je jezik* $EQ_{\textsf{DKA}} = \{< \mathcal{A}, \mathcal{B} >|\ \mathcal{A}\ \textsf{\textit{i}}\ \mathcal{B}\ \textsf{\textit{su}}\ \textsf{\textbf{DKA}}\textsf{\textit{-ovi t.d.}}\ L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})\}$ *odlučiv testiranjem prihvaćaju li* **DKA***-ovi sve riječi do neke određene duljine.*

**115.** *Dokažite da je jezik* $A\varepsilon_{\textsf{KSG}} = \{< \mathcal{G}, w >|\ \mathcal{G}\ \textsf{\textit{je}}\ \textsf{\textbf{KSG}}\ \textsf{\textit{nad}}\ \Sigma\ \textsf{\textit{t.d.}}\ \mathcal{G}\ \textsf{\textit{generira}}\ w\}$ *odlučiv.*

**116.** *Dokažite da je jezik* $E_{\textsf{KSG}} = \{< \mathcal{G} >|\ \mathcal{G}\ \textsf{\textit{je}}\ \textsf{\textbf{KSG}}\ \textsf{\textit{nad}}\ \Sigma\ \textsf{\textit{t.d.}}\ L(\mathcal{G}) = \emptyset\}$ *odlučiv.*

**117.** *Da li je jezik* $EQ_{\textsf{DKA},\textsf{RegEx}} = \{< \mathcal{A}, \mathcal{R} >|\ \mathcal{A}\ \textsf{\textit{je}}\ \textsf{\textbf{DKA}}\ \textsf{\textit{nad}}\ \Sigma,\ \mathcal{R}\ \textsf{\textit{je}}\ \textsf{\textbf{RegEx}}\ \textsf{\textit{nad}}\ \Sigma\ \textsf{\textit{t.d.}}\ L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{R})\}$ *odlučiv?*

**118.** *Da li je jezik* $ALL_{\textsf{DKA}} = \{< \mathcal{A} >|\ \mathcal{A}\ \textsf{\textit{je}}\ \textsf{\textbf{DKA}}\ \textsf{\textit{nad}}\ \Sigma\ \textsf{\textit{t.d.}}\ L(\mathcal{A}) = \Sigma^*\}$ *odlučiv?*

**119.** *Da li je jezik* $SUB_{\textsf{RegEx}} = \{< R, S >|\ R\ \textsf{\textit{i}}\ S\ \textsf{\textit{su}}\ \textsf{\textbf{RegEx}}\textsf{\textit{-i nad}}\ \Sigma\ \textsf{\textit{t.d.}}\ L(R) \subseteq L(S)\}$ *odlučiv?*

**120.** *Da li je jezik* $A\varepsilon_{\textsf{KSG}} = \{< \mathcal{G} >| \ \mathcal{G}$ *je* **KSG** *nad* $\Sigma$ *t.d.* $\varepsilon \in L(\mathcal{G})\}$ *odlučiv?*

**121.** *Da li je jezik* $INF_{\textsf{DKA}} = \{< \mathcal{A} >| \ \mathcal{A}$ *je* **DKA** *nad* $\Sigma$ *t.d.* $|L(\mathcal{A})| = \infty\}$ *odlučiv?*

**122.** *Pretpostavimo da su jezici* $A$*,* $A \cup B$ *i* $A \cap B$ *odlučivi. Da li je tada nužno i jezik* $B$ *odlučiv?*

**123.** *Da li je jezik* $L = \{< \mathcal{A} >| \ \mathcal{A}$ *je* **DKA** *nad* $\{0,1\}$ *koji ne prihvaća niti jednu riječ koja sadrži neparan broj jedinica*$\}$ *odlučiv?*

**124.** *Da li je jezik* $L = \{< \mathcal{R} >| \ \mathcal{R}$ *je* **RegEx** *koji opisuje jezik u kojem se nalazi barem jedna riječ koja sadrži riječ 111 kao podriječ*$\}$ *odlučiv?*

**125.** *Da li je jezik* $L = \{< \mathcal{G} >| \ \mathcal{G}$ *je* **KSG** *nad* $\{0,1\}$ *t.d.* $1^* \cap L(\mathcal{G}) \neq \emptyset\}$ *odlučiv?*

* **126.** *Da li je jezik* $L = \{< \mathcal{G} >| \ \mathcal{G}$ *je* **KSG** *nad* $\{0,1\}$ *t.d.* $1^* \subseteq L(\mathcal{G})\}$ *odlučiv?*

**127.** *Da li je jezik* $L = \{< \mathcal{A} >| \ \mathcal{A}$ *je* **DKA** *nad* $\Sigma$ *t.d.* $\mathcal{A}$ *prihvaća* $w^{\tau}$ *kad god prihvaća* $w\}$ *odlučiv?*

**128.** *Da li je jezik* $L = \{< \mathcal{A} >| \ \mathcal{A}$ *je* **DKA** *nad* $\Sigma$ *t.d.* $\mathcal{A}$ *prihvaća neku riječ oblika* $ww^{\tau}\}$ *odlučiv?*

**129.** *Nekorisno stanje potisnog automata je ono u kojem se potisni automat neće naći niti za jednu ulaznu riječ. Dokažite da je jezik* $L = \{< \mathcal{A} >| \ \mathcal{A}$ *je* **PDA** *koji ima barem jedno nekorisno stanje* $\}$ *odlučiv.*

**130.** *Dokažite da je jezik* $C$ *rekurzivno prebrojiv akko postoji odlučiv jezik* $D$ *takav da* $C = \{x \mid \exists y \,.\, (x,y) \in D\}$*.*

**131** (Postov teorem)**.** *$A$ je odlučiv akko $A$ i $A^c$ su rekurzivno prebrojivi.*

**132.** *Neka su* $A, B \in$ **co-RE** *takvi da* $A \cap B = \emptyset$*. Dokažite da postoji odlučiv jezik* $C$ *koji separira* $A$ *i* $B$*.*

**133.** *Dokažite da je jezik* $HALT_{\textsf{TM}} = \{< \mathcal{M}, w >| \ \mathcal{M}$ *je* **TM** *t.d.* $\mathcal{M}$ *staje na ulazu* $w\}$ *neodlučiv.*

**134.** *Dokažite da je jezik* $TOTAL_{\textsf{TM}} = \{< \mathcal{M} >| \ \mathcal{M}$ *je* **TM** *t.d.* $\mathcal{M}$ *staje na svakom ulazu* $\}$ *neodlučiv.*

**135.** *Dokažite da je jezik* $E_{\textsf{TM}} = \{< \mathcal{M} >| \ \mathcal{M}$ *je* **TM** *t.d.* $L(\mathcal{M}) = \emptyset\}$ *neodlučiv.*

**136.** *Dokažite da je jezik* $EQ_{\textsf{TM}} = \{< \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 >| \ \mathcal{M}_1$ *i* $\mathcal{M}_2$ *su* **TM***-ovi t.d.* $L(\mathcal{M}_1) = L(\mathcal{M}_2)\}$ *neodlučiv.*

**137.** *Da li je jezik* $L = \{< \mathcal{M} >| \ \mathcal{M}$ *je* **TM** *t.d.* $\mathcal{M}$ *prihvaća* $\varepsilon\}$ *odlučiv?*

**138.** *Da li je jezik* $L = \{< \mathcal{M} >| \ \mathcal{M}$ *je* **TM** *t.d.* $|L(\mathcal{M})| = \infty\}$ *odlučiv?*

**139.** *Da li je jezik* $L = \{< \mathcal{M} >| \ \mathcal{M}$ *je* **TM** *t.d.* $\mathcal{M}$ *prihvaća* $w^{\tau}$ *kad god prihvaća* $w\}$ *odlučiv?*

**140.** *Da li je jezik* $L = \{< \mathcal{M} >| \ \mathcal{M}$ *je* **TM** *t.d.* $L(\mathcal{M}) \subseteq 0^*1^*\}$ *odlučiv?*

**141.** *Da li su slijedeći jezici odlučivi:*

(i) $L = \{< \mathcal{M} >| \mathcal{M}$ *je* **TM** *t.d.* $\mathcal{M}$ *ima više od 42 stanja* $\}$;

(ii) $L = \{< \mathcal{M} >| \mathcal{M}$ *je* **TM** *t.d.* $L(\mathcal{M})$ *se može prepoznati nekim* **TM**-*om* $\mathcal{M}'$ *koji ima više od 42 stanja* $\}$;

(iii) $L = \{< \mathcal{M} >| \mathcal{M}$ *je* **TM** *t.d.* $L(\mathcal{M})$ *se može prepoznati nekim* **TM**-*om* $\mathcal{M}'$ *s najviše 42 stanja čiji alfabet trake sadrži najviše 5 simbola*$\}$;

(iv) $L = \{< \mathcal{M} >| \mathcal{M}$ *je* **TM** *t.d.* $\mathcal{M}$ *prihvaća svaku riječ parne duljine (a možda i neke druge riječi)*$\}$.

**142.** *Neka je $L$ jezik koji se sastoji samo od jedne riječi $s$, gdje je*

$$s = \begin{cases} 0, & \text{ako će se svemir prestati širiti,} \\ 1, & \text{ako se svemir neće prestati širiti.} \end{cases}$$

*Da li je $L$ odlučiv?*

**143.** *Neka su dani slijedeći jezici:*

- $E_{\mathbf{TM}} = \{< \mathcal{M} >| \mathcal{M}$ *je* **TM** *t.d.* $L(\mathcal{M}) = \emptyset\}$;
- $EInt_{\mathbf{TM}} = \{< \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 >| \mathcal{M}_1$ *i* $\mathcal{M}_2$ *su* **TM**-*ovi t.d.* $L(\mathcal{M}_1) \cap L(\mathcal{M}_2) = \emptyset\}$.

*Dokažite da vrijedi $E_{\mathbf{TM}} \leq_m EInt_{\mathbf{TM}}$. Da li je $EInt_{\mathbf{TM}}$ odlučiv?*

**144.** *Neka je $L = \{w \mid w = 0x,$ za neki $x \in A_{\mathbf{TM}}$ ili $w = 1y$ za neki $y \in A^c_{\mathbf{TM}}\}$. Dokažite da niti $L$ niti $L^c$ nije rekurzivno prebrojiv.*

**145.** *Dokažite da ako je $L$ rekurzivno prebrojiv jezik i vrijedi $L \leq_m L^c$, onda je $L$ odlučiv.*

**146.** *Nađite primjer neodlučivog jezika $L$ takvog da vrijedi $L \leq_m L^c$.*

**147.** *Konačni automat s dvije glave (2-**DKA**) je deterministički konačni automat koji posjeduje dvije glave za čitanje ulazne riječi takve da se svaka od glava može micati lijevo i desno (na početku rada automata obje glave nalaze se na lijevom kraju ulazne riječi). Ulazna riječ je s lijeva i s desna omeđena oznakom $\llcorner\!\lrcorner$ (koja nije element ulaznog alfabeta). Automat prihvaća ulaznu riječ čim se nađe u prihvaćajućem stanju neovisno o tome gdje se pritom nalaze glave za čitanje.*

(i) *Konstruirajte 2-**DKA** koji prepoznaje jezik $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$;*

(ii) *Dokažite da je jezik $A_{2\text{-}\mathbf{DKA}} = \{< \mathcal{A}, w >| \mathcal{A}$ je 2-**DKA** t.d. $\mathcal{A}$ prihvaća $w\}$ odlučiv.*

**148.** *Za jezik $L$ definiramo jezik $substring(L)$ na slijedeći način:*

$$substring(L) = \{y \mid \exists x \,.\, \exists z \,.\ \text{t.d. } xyz \in L\}$$

(i) *Dokažite ili opovrgnite: Ako je $L$ rekurzivno prebrojiv, tada je i $substring(L)$ rekurzivno prebrojiv.*

(ii) *Dokažite ili opovrgnite: Ako je $L$ odlučiv, tada je i $substring(L)$ odlučiv.*

**149.** *Neka je $L = \{< \mathcal{M} >| \mathcal{M}$ je **TM** t.d. $\mathcal{M}$ prihvaća sve riječi parne duljine i niti jednu riječ neparne duljine $\}$.*

*(i) Da li je $L$ odlučiv jezik?*

*(ii) Da li je $L$ rekurzivno prebrojiv jezik?*

*(iii) Da li je $L^c$ rekurzivno prebrojiv jezik?*

**150.** *Nekorisno stanje Turingovog stroja je ono u kojem se Turingov stroj neće naći niti za jednu ulaznu riječ. Dokažite da jezik* $L = \{< \mathcal{M} >| \ \mathcal{M}$ *je* **TM** *koji ima barem jedno nekorisno stanje* $\}$ *nije odlučiv.*

**151.** *Označimo s* $T_c$ *skup svih Turingovih strojeva s* $\leq c$ *stanja.*

*(i) Pokažite da je halting problem za sve strojeve iz skupa* $T_1$ *trivijalno odlučiv.*

*(ii) Postoji li* $c > 1$ *takav da je halting problem odlučiv za zsve strojeve iz skupa* $T_c$*?*