

Matematička teorija računarstva

Vježbe 21

Matko Botinčan

PMF – Matematički odjel

27.04.2007.

Definicija

Kažemo da je \mathcal{P} netrivialno semantičko svojstvo ako:

- Za sve **TM**-ove \mathcal{M}_1 i \mathcal{M}_2 t.d. je $L(\mathcal{M}_1) = L(\mathcal{M}_2)$ vrijedi:
 $\langle \mathcal{M}_1 \rangle \in \mathcal{P}$ akko $\langle \mathcal{M}_2 \rangle \in \mathcal{P}$;
- Postoje **TM**-ovi \mathcal{M}_1 i \mathcal{M}_2 t.d. $\langle \mathcal{M}_1 \rangle \in \mathcal{P}$ i $\langle \mathcal{M}_2 \rangle \notin \mathcal{P}$.

Teorem (Rice)

Svako netrivialno semantičko svojstvo je neodlučivo.

Zadatak:

Da li je jezik $L = \{ \langle \mathcal{M} \rangle \mid \mathcal{M} \text{ je } \mathbf{TM} \text{ t.d. } L(\mathcal{M}) \subseteq 0^*1^* \}$ odlučiv?

Zadatak:

Da li su slijedeći jezici odlučivi:

- (i) $L = \{ \langle \mathcal{M} \rangle \mid \mathcal{M} \text{ je } \mathbf{TM} \text{ t.d. } \mathcal{M} \text{ ima više od } 42 \text{ stanja} \}$
- (ii) $L = \{ \langle \mathcal{M} \rangle \mid$
 $\mathcal{M} \text{ je } \mathbf{TM} \text{ t.d. } L(\mathcal{M}) \text{ se može prepoznati nekim } \mathbf{TM}\text{-om}$
 $\mathcal{M}' \text{ koji ima više od } 42 \text{ stanja} \}$
- (iii) $L = \{ \langle \mathcal{M} \rangle \mid$
 $\mathcal{M} \text{ je } \mathbf{TM} \text{ t.d. } L(\mathcal{M}) \text{ se može prepoznati nekim } \mathbf{TM}\text{-om}$
 $\mathcal{M}' \text{ s najviše } 42 \text{ stanja čiji alfabet trake sadrži najviše } 5 \text{ simbola} \}$
- (iv) $L = \{ \langle \mathcal{M} \rangle \mid$
 $\mathcal{M} \text{ je } \mathbf{TM} \text{ t.d. } \mathcal{M} \text{ prihvaća svaku riječ parne duljine}$
 $(\text{a možda i neke druge riječi}) \}$

Zadatak:

Neka je L jezik koji se sastoji samo od jedne riječi s , gdje je

$$s = \begin{cases} 0, & \text{ako će se svemir prestati širiti,} \\ 1, & \text{ako se svemir neće prestati širiti.} \end{cases}$$

Da li je L odlučiv?

Redukcije mapiranjem

Definicija

Za funkciju $f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ kažemo da je *izračunljiva* ako postoji Turingov stroj \mathcal{M} t.d. za sve $w \in \Sigma^*$ \mathcal{M} na ulazu w staje sa sadržajem $f(w)$ zapisanim na traci.

Definicija

$A \subseteq \Sigma^*$ je *reducibilan mapiranjem* na $B \subseteq \Sigma^*$ (u oznaci $A \leq_m B$) ako postoji izračunljiva funkcija $f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ t.d. za sve w vrijedi:

$$w \in A \iff f(w) \in B.$$

Teorem

Ako je $A \leq_m B$ i $B \in \mathbf{R}$, tada vrijedi i $A \in \mathbf{R}$.

Ako je $A \leq_m B$ i $A \notin \mathbf{R}$, tada vrijedi i $B \notin \mathbf{R}$.

Teorem

Ako je $A \leq_m B$ i $B \in \mathbf{RE}$, tada vrijedi i $A \in \mathbf{RE}$.

Ako je $A \leq_m B$ i $A \notin \mathbf{RE}$, tada vrijedi i $B \notin \mathbf{RE}$.

Zadatak:

Neka su dani slijedeći jezici:

- $E_{\mathbf{TM}} = \{ \langle \mathcal{M} \rangle \mid \mathcal{M} \text{ je } \mathbf{TM} \text{ t.d. } L(\mathcal{M}) = \emptyset \};$
- $EInt_{\mathbf{TM}} = \{ \langle \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \rangle \mid$
 $\mathcal{M}_1 \text{ i } \mathcal{M}_2 \text{ su } \mathbf{TM}\text{-ovi t.d. } L(\mathcal{M}_1) \cap L(\mathcal{M}_2) = \emptyset \}.$

Dokažite da vrijedi $E_{\mathbf{TM}} \leq_m EInt_{\mathbf{TM}}$. Da li je $EInt_{\mathbf{TM}}$ odlučiv?

Zadatak:

Neka je $L = \{ w \mid w = 0x, \text{ za neki } x \in A_{\mathbf{TM}} \text{ ili } w = 1y \text{ za neki } y \in A_{\mathbf{TM}}^c \}$. Dokažite da niti L niti L^c nije rekurzivno prebrojiv.

Zadatak:

Dokažite da ako je L rekurzivno prebrojiv jezik i vrijedi $L \leq_m L^c$, onda je L odlučiv.

Zadatak:

Nadite primjer neodlučivog jezika L takvog da vrijedi $L \leq_m L^c$.