Matematička teorija računarstva

Vježbe 21

Matko Botinčan

PMF – Matematički odjel

27.04.2007.

Definicija

Kažemo da je $\mathcal{P}$ netrivijalno semantičko svojstvo ako:

- *Za sve* **TM***-ove $\mathcal{M}_1$ i $\mathcal{M}_2$ t.d. je $L(\mathcal{M}_1) = L(\mathcal{M}_2)$ vrijedi: $<\mathcal{M}_1>\in \mathcal{P}$ akko $<\mathcal{M}_2>\in \mathcal{P}$;*
- *Postoje* **TM***-ovi $\mathcal{M}_1$ i $\mathcal{M}_2$ t.d. $<\mathcal{M}_1>\in \mathcal{P}$ i $<\mathcal{M}_2>\notin \mathcal{P}$.*

Teorem (Rice)

Svako netrivijalno semantičko svojstvo je neodlučivo.

Zadatak:

Da li je jezik $L = \{<\mathcal{M}> \mid \mathcal{M}$ je **TM** t.d. $L(\mathcal{M}) \subseteq 0^*1^*\}$ odlučiv?

Zadatak:

Da li su slijedeći jezici odlučivi:

(i) $L = \{<\mathcal{M}> \mid \mathcal{M}$ je **TM** t.d. $\mathcal{M}$ ima više od 42 stanja $\}$

(ii) $L = \{<\mathcal{M}> \mid$ $\mathcal{M}$ je **TM** t.d. $L(\mathcal{M})$ se može prepoznati nekim **TM**-om $\mathcal{M}'$ koji ima više od 42 stanja $\}$

(iii) $L = \{<\mathcal{M}> \mid$ $\mathcal{M}$ je **TM** t.d. $L(\mathcal{M})$ se može prepoznati nekim **TM**-om $\mathcal{M}'$ s najviše 42 stanja čiji alfabet trake sadrži najviše 5 simbola$\}$

(iv) $L = \{<\mathcal{M}> \mid$ $\mathcal{M}$ je **TM** t.d. $\mathcal{M}$ prihvaća svaku riječ parne duljine (a možda i neke druge riječi)$\}$

Zadatak:

Neka je L jezik koji se sastoji samo od jedne riječi s, gdje je

$$s = \begin{cases} 0, & \text{ako će se svemir prestati širiti,} \\ 1, & \text{ako se svemir neće prestati širiti.} \end{cases}$$

Da li je L odlučiv?

Redukcije mapiranjem

Definicija

Za funkciju $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ kažemo da je izračunljiva ako postoji Turingov stroj $\mathcal{M}$ t.d. za sve $w \in \Sigma^*$ $\mathcal{M}$ na ulazu w staje sa sadržajem $f(w)$ zapisanim na traci.

Definicija

$A \subseteq \Sigma^*$ je reducibilan mapiranjem na $B \subseteq \Sigma^*$ (u oznaci $A \leq_m B$) ako postoji izračunljiva funkcija $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ t.d. za sve w vrijedi:

$$w \in A \quad \Leftrightarrow \quad f(w) \in B.$$

Teorem

*Ako je $A \leq_m B$ i $B \in$ **R**, tada vrijedi i $A \in$ **R**.*
*Ako je $A \leq_m B$ i $A \notin$ **R**, tada vrijedi i $B \notin$ **R**.*

Teorem

*Ako je $A \leq_m B$ i $B \in$ **RE**, tada vrijedi i $A \in$ **RE**.*
*Ako je $A \leq_m B$ i $A \notin$ **RE**, tada vrijedi i $B \notin$ **RE**.*

Zadatak:

Neka su dani slijedeći jezici:

- $E_{\mathbf{TM}} = \{< \mathcal{M} >| \mathcal{M}$ je **TM** t.d. $L(\mathcal{M}) = \emptyset\}$;
- $EInt_{\mathbf{TM}} = \{< \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 >|$
  $\mathcal{M}_1$ i $\mathcal{M}_2$ su **TM**-ovi t.d. $L(\mathcal{M}_1) \cap L(\mathcal{M}_2) = \emptyset\}$.

Dokažite da vrijedi $E_{\mathbf{TM}} \leq_m EInt_{\mathbf{TM}}$. Da li je $EInt_{\mathbf{TM}}$ odlučiv?

Zadatak:

Neka je $L = \{w \mid w = 0x,$ za neki $x \in A_{\mathbf{TM}}$ ili $w = 1y$ za neki $y \in A^c_{\mathbf{TM}}\}$. Dokažite da niti L niti L^c nije rekurzivno prebrojiv.

Zadatak:

Dokažite da ako je L rekurzivno prebrojiv jezik i vrijedi $L \leq_m L^c$, onda je L odlučiv.

Zadatak:

Nađite primjer neodlučivog jezika L takvog da vrijedi $L \leq_m L^c$.