

Matematička teorija računarstva

Vježbe 17

Matko Botinčan

PMF – Matematički odjel

23.03.2007.

Definicija

Kažemo da je jezik $L \subseteq \Sigma^*$ *Turing-prepoznatljiv (ili rekurzivno prebrojiv)* ako postoji **TM** \mathcal{M} t.d. vrijedi:

- za svaki $w \in L$, \mathcal{M} prihvaća w
- za svaki $w \in L^c$, \mathcal{M} ne prihvaća w
($\rightarrow \mathcal{M}$ odbacuje w ili \mathcal{M} ne staje na w)

RE := $\{L \subseteq \Sigma^* \mid L \text{ rekurzivno prebrojiv}\}$

Definicija

Kažemo da je jezik $L \subseteq \Sigma^*$ *(Turing-)odlučiv (ili rekurzivan)* ako postoji **TM** \mathcal{M} t.d. vrijedi:

- za svaki $w \in L$, \mathcal{M} prihvaća w
- za svaki $w \in L^c$, \mathcal{M} odbacuje w

R := $\{L \subseteq \Sigma^* \mid L \text{ odlučiv}\}$

Zadatak:

Neka je k -**PDA** potisni automat koji ima k stogova. Primjerice, 0 -**PDA** je (nedeterministički) konačni automat, a 1 -**PDA** “obični” potisni automat.

Označimo također s k -**PDA** pripadnu klasu jezika koje prepoznaje neki k -**PDA**. Primjerice, znamo da vrijedi 0 -**PDA** \subsetneq 1 -**PDA**.

Dokažite da vrijede slijedeće tvrdnje:

- (i) 1 -**PDA** \subsetneq 2 -**PDA**
- (ii) 2 -**PDA** = 3 -**PDA**

Nedeterministički Turingov stroj je $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F^+, F^-)$, pri čemu je:

- Q — konačan skup stanja
- Γ — alfabet trake,
 $\sqcup \in \Gamma$ — oznaka praznog mjesta na traci
- $\Sigma \subseteq \Gamma$ — alfabet ulaznog niza znakova, $\sqcup \notin \Sigma$
- $\delta: Q \times \Gamma \rightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{L, D, S\})$ — tranzicijska funkcija
- $q_0 \in Q$ — početno stanje
- $F^+ \subseteq Q$ — skup prihvaćajućih stanja
- $F^- \subseteq Q$ — skup odbacujućih stanja

k -tračni Turingov stroj je $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F^+, F^-)$,
pri čemu je:

- Q — konačan skup stanja
- Γ — alfabet trake,
 $\sqcup \in \Gamma$ — oznaka praznog mjesta na trakama
- $\Sigma \subseteq \Gamma$ — alfabet ulaznog niza znakova, $\sqcup \notin \Sigma$
- $\delta: Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, D, S\}^k$ — tranzicijska funkcija
- $q_0 \in Q$ — početno stanje
- $F^+ \subseteq Q$ — skup prihvaćajućih stanja
- $F^- \subseteq Q$ — skup odbacujućih stanja

Teorem

$$\begin{aligned}\mathbf{RE} &= \{L \subseteq \Sigma^* \mid \exists \text{ deterministički TM koji prepoznaje } L\} \\ &= \{L \subseteq \Sigma^* \mid \exists \text{ nedeterministički TM koji prepoznaje } L\} \\ &= \{L \subseteq \Sigma^* \mid \exists \text{ višetračni TM koji prepoznaje } L\}\end{aligned}$$

Teorem

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \{L \subseteq \Sigma^* \mid \exists \text{ deterministički TM koji odlučuje } L\} \\ &= \{L \subseteq \Sigma^* \mid \exists \text{ nedeterministički TM koji odlučuje } L\} \\ &= \{L \subseteq \Sigma^* \mid \exists \text{ višetračni TM koji odlučuje } L\}\end{aligned}$$

Zadatak:

Dokažite da je klasa odlučivih jezika **R** zatvorena na slijedeće operacije:

- (i) uniju
- (ii) presjek
- (iii) komplementiranje
- (iv) konkatenciju
- (v) iteraciju

Zadatak:

Dokažite da je klasa rekurzivno prebrojivih jezika **RE** zatvorena na slijedeće operacije:

- (i) uniju
- (ii) presjek
- (iii) konkatenciju
- (iv) iteraciju

Zadatak:

Odredite koju klasu jezika prepoznaju slijedeći formalni strojevi:

- (i) Turingovi strojevi čija tranzicijska funkcija ima oblik

$$\delta: Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{D\}$$

- (ii) Turingovi strojevi čija tranzicijska funkcija ima oblik

$$\delta: Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{D, S\}$$