

# Matematička teorija računarstva

## Vježbe 17

Matko Botinčan

PMF – Matematički odjel

23.03.2007.

### Definicija

Kažemo da je jezik  $L \subseteq \Sigma^*$  *Turing-prepoznatljiv (ili rekurzivno prebrojiv)* ako postoji **TM**  $\mathcal{M}$  t.d. vrijedi:

- za svaki  $w \in L$ ,  $\mathcal{M}$  prihvaća  $w$
- za svaki  $w \in L^c$ ,  $\mathcal{M}$  ne prihvaća  $w$   
( $\rightarrow \mathcal{M}$  odbacuje  $w$  ili  $\mathcal{M}$  ne staje na  $w$ )

**RE** :=  $\{L \subseteq \Sigma^* \mid L \text{ rekurzivno prebrojiv}\}$

### Definicija

Kažemo da je jezik  $L \subseteq \Sigma^*$  *(Turing-)odlučiv (ili rekurzivan)* ako postoji **TM**  $\mathcal{M}$  t.d. vrijedi:

- za svaki  $w \in L$ ,  $\mathcal{M}$  prihvaća  $w$
- za svaki  $w \in L^c$ ,  $\mathcal{M}$  odbacuje  $w$

**R** :=  $\{L \subseteq \Sigma^* \mid L \text{ odlučiv}\}$

### Zadatak:

Neka je  $k$ -**PDA** potisni automat koji ima  $k$  stogova. Primjerice, **0-PDA** je (nedeterministički) konačni automat, a **1-PDA** "obični" potisni automat.

Označimo također s  $k$ -**PDA** pripadnu klasu jezika koje prepoznaje neki  $k$ -**PDA**. Primjerice, znamo da vrijedi **0-PDA**  $\subsetneq$  **1-PDA**.

Dokažite da vrijede slijedeće tvrdnje:

- (i) **1-PDA**  $\subsetneq$  **2-PDA**
- (ii) **2-PDA** = **3-PDA**

**Nedeterministički Turingov stroj** je  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F^+, F^-)$ , pri čemu je:

- $Q$  — konačan skup stanja
- $\Gamma$  — alfabet trake,  
 $\sqcup \in \Gamma$  — oznaka praznog mjesta na traci
- $\Sigma \subseteq \Gamma$  — alfabet ulaznog niza znakova,  $\sqcup \notin \Sigma$
- $\delta: Q \times \Gamma \rightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{L, D, S\})$  — tranzicijska funkcija
- $q_0 \in Q$  — početno stanje
- $F^+ \subseteq Q$  — skup prihvaćajućih stanja
- $F^- \subseteq Q$  — skup odbacujućih stanja

$k$ -tračni Turingov stroj je  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F^+, F^-)$ ,

pri čemu je:

- $Q$  — konačan skup stanja
- $\Gamma$  — alfabet trake,  
 $\sqcup \in \Gamma$  — oznaka praznog mjesta na trakama
- $\Sigma \subseteq \Gamma$  — alfabet ulaznog niza znakova,  $\sqcup \notin \Sigma$
- $\delta: Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, D, S\}^k$  — tranzicijska funkcija
- $q_0 \in Q$  — početno stanje
- $F^+ \subseteq Q$  — skup prihvaćajućih stanja
- $F^- \subseteq Q$  — skup odbacujućih stanja

### Teorem

$$\begin{aligned} \mathbf{RE} &= \{L \subseteq \Sigma^* \mid \exists \text{ deterministički TM koji prepoznaje } L\} \\ &= \{L \subseteq \Sigma^* \mid \exists \text{ nedeterministički TM koji prepoznaje } L\} \\ &= \{L \subseteq \Sigma^* \mid \exists \text{ višetračni TM koji prepoznaje } L\} \end{aligned}$$

### Teorem

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \{L \subseteq \Sigma^* \mid \exists \text{ deterministički TM koji odlučuje } L\} \\ &= \{L \subseteq \Sigma^* \mid \exists \text{ nedeterministički TM koji odlučuje } L\} \\ &= \{L \subseteq \Sigma^* \mid \exists \text{ višetračni TM koji odlučuje } L\} \end{aligned}$$

### Zadatak:

Dokažite da je klasa odlučivih jezika  $\mathbf{R}$  zatvorena na slijedeće operacije:

- (i) uniju
- (ii) presjek
- (iii) komplementiranje
- (iv) konkatenciju
- (v) iteraciju

### Zadatak:

Dokažite da je klasa rekurzivno prebrojivih jezika  $\mathbf{RE}$  zatvorena na slijedeće operacije:

- (i) uniju
- (ii) presjek
- (iii) konkatenciju
- (iv) iteraciju

### Zadatak:

Odredite koju klasu jezika prepoznaju slijedeći formalni strojevi:

- (i) Turingovi strojevi čija tranzicijska funkcija ima oblik  
 $\delta: Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{D\}$
- (ii) Turingovi strojevi čija tranzicijska funkcija ima oblik  
 $\delta: Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{D, S\}$