

# Matematička teorija računarstva

## Vježbe 16

Matko Botinčan

PMF – Matematički odjel

16.03.2007.

# Turingovi strojevi

(Deterministički) Turingov stroj (**TM**) je uređena sedmorka  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F^+, F^-)$ , pri čemu je:

- $Q$  — konačan skup stanja
- $\Gamma$  — alfabet trake,  
 $\sqcup \in \Gamma$  — oznaka praznog mjesta na traci
- $\Sigma \subseteq \Gamma$  — alfabet ulaznog niza znakova,  $\sqcup \notin \Sigma$
- $\delta: Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, D, S\}$  — tranzicijska funkcija
- $q_0 \in Q$  — početno stanje
- $F^+ \subseteq Q$  — skup prihvaćajućih stanja
- $F^- \subseteq Q$  — skup odbacujućih stanja

**Konfiguracija TM-a**  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F^+, F^-)$  je uređena trojka  $(u, q, v)$  t.d. vrijedi:

- $q \in Q$  je trenutno stanje stroja
- $u \cdot v \in \Gamma^*$  je trenutni sadržaj trake
- glava stroja se trenutno nalazi na prvom simbolu od  $v$

Kažemo da iz konfiguracije  $(u, q, v)$  slijedi konfiguracija  $(u', q', v')$ , u oznaci  $(u, q, v) \vdash_{\mathcal{M}} (u', q', v')$ , ukoliko  $\mathcal{M}$  iz konfiguracije  $(u, q, v)$  stiže u konfiguraciju  $(u', q', v')$  u jednom koraku.

( $\vdash_{\mathcal{M}}$  je relacija definirana na skupu svih konfiguracija stroja  $\mathcal{M}$ .)

## Formalna definicija relacije $\vdash_{\mathcal{M}}$

Neka su  $a, b$  i  $c \in \Gamma$ ,  $u$  i  $v \in \Gamma^*$ , te  $q$  i  $q' \in Q$ . Tada:

$$(ua, q, bv) \vdash_{\mathcal{M}} (u, q', acv) \Leftrightarrow \delta(q, b) = (q', c, L)$$

$$(ua, q, bv) \vdash_{\mathcal{M}} (uac, q', v) \Leftrightarrow \delta(q, b) = (q', c, D)$$

$$(ua, q, bv) \vdash_{\mathcal{M}} (ua, q', cv) \Leftrightarrow \delta(q, b) = (q', c, S)$$

Kažemo da iz konfiguracije  $(u, q, v)$  konfiguracija  $(u', q', v')$  **dostiživa u  $k$  koraka** ako vrijedi  $(u, q, v) (\vdash_{\mathcal{M}})^k (u', q', v')$ .

Kažemo da iz konfiguracije  $(u, q, v)$  konfiguracija  $(u', q', v')$  **dostiživa** ako vrijedi  $(u, q, v) (\vdash_{\mathcal{M}})^* (u', q', v')$ .

- Početna konfiguracija stroja  $\mathcal{M}$  na ulazu  $w$ :  $(\varepsilon, q_0, w)$
- Konfiguraciju  $(u, q, v)$  nazivamo prihvaćajućom ako je  $q \in F^+$
- Konfiguraciju  $(u, q, v)$  nazivamo odbacujućom ako je  $q \in F^-$

U prihvaćajućoj ili odbacujućoj konfiguraciji stroj staje.

Izračunavanje stroja  $\mathcal{M}$  na ulazu  $w$  je (općenito beskonačan) niz konfiguracija  $(C_i)_{i \geq 0}$  takav da vrijedi:

- $C_0$  je početna konfiguracija od  $\mathcal{M}$  na ulazu  $w$
- za sve  $i \geq 0$  vrijedi  $C_i \vdash_{\mathcal{M}} C_{i+1}$

Izračunavanje nazivamo prihvaćajućim (odbacujućim) ukoliko je ono konačno, te posljednja konfiguracija u nizu je prihvaćajuća (odbacujuća) konfiguracija.

Zadatak:

- (i) Konstruirajte Turingov stroj koji računa sljedbenika broja na traci zapisanog u binarnom sustavu. Glava stroja na početku rada pozicionirana je na najznačajnijoj znamenici broja.
- (ii) Odredite izračunavanje stroja na ulazu 11011.

Kažemo da stroj  $\mathcal{M}$  **prihvaća (odbacuje)** ulaz  $w$  ako postoji prihvaćajuće (odbacujuće) izračunavanje od  $\mathcal{M}$  na ulazu  $w$ .

### Važna napomena

Općenito, tri su mogućnosti za izračunavanje od  $\mathcal{M}$  na ulazu  $w$ :

- $\mathcal{M}$  prihvaća  $w$
- $\mathcal{M}$  odbacuje  $w$
- $\mathcal{M}$  nikada ne dostiže konfiguraciju u kojoj staje (tj. izračunavanje je beskonačno)

### Definicija (Jezik stroja $\mathcal{M}$ )

$$L(\mathcal{M}) = \{w \in \Sigma^* \mid \mathcal{M} \text{ prihvaća } w\}$$

### Definicija

Kažemo da je jezik  $L \subseteq \Sigma^*$  *Turing-prepoznatljiv (ili rekurzivno prebrojiv)* ako postoji **TM**  $\mathcal{M}$  t.d. vrijedi:

- za svaki  $w \in L$ ,  $\mathcal{M}$  prihvaća  $w$
- za svaki  $w \in L^c$ ,  $\mathcal{M}$  ne prihvaća  $w$   
( $\rightarrow \mathcal{M}$  odbacuje  $w$  ili  $\mathcal{M}$  ne staje na  $w$ )

(tj.  $L(\mathcal{M}) = L$ )



## Definicija

Kažemo da je jezik  $L \subseteq \Sigma^*$  (*Turing-*)odlučiv (ili rekurzivan) ako postoji **TM**  $\mathcal{M}$  t.d. vrijedi:

- za svaki  $w \in L$ ,  $\mathcal{M}$  prihvaća  $w$
- za svaki  $w \in L^c$ ,  $\mathcal{M}$  odbacuje  $w$

$\mathbf{R} := \{L \subseteq \Sigma^* \mid L \text{ odlučiv}\}$

$\mathbf{RE} := \{L \subseteq \Sigma^* \mid L \text{ rekurzivno prebrojiv}\}$

$$\mathbf{R} \subsetneq \mathbf{RE}$$

**Zadatak:**

- (i) Konstruirajte Turingov stroj koji odlučuje jezik  $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ je palindrom}\}$ . Glava stroja na početku rada pozicionirana je na najljevijem simbolu.
- (ii) Odredite izračunavanje stroja na ulazu 0010.
- (iii) Odredite izračunavanje stroja na ulazu 101.