

Matematička teorija računarstva

Vježbe 16

Matko Botinčan

PMF – Matematički odjel

16.03.2007.

Turingovi strojevi

(Deterministički) Turingov stroj (**TM**) je uređena sedmorka $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F^+, F^-)$, pri čemu je:

- Q — konačan skup stanja
- Γ — alfabet trake,
 - $\sqcup \in \Gamma$ — oznaka praznog mjesta na traci
- $\Sigma \subseteq \Gamma$ — alfabet ulaznog niza znakova, $\sqcup \notin \Sigma$
- $\delta: Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, D, S\}$ — tranzicijska funkcija
- $q_0 \in Q$ — početno stanje
- $F^+ \subseteq Q$ — skup prihvaćajućih stanja
- $F^- \subseteq Q$ — skup odbacujućih stanja

Konfiguracija TM-a $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F^+, F^-)$ je uređena trojka (u, q, v) t.d. vrijedi:

- $q \in Q$ je trenutno stanje stroja
- $u \cdot v \in \Gamma^*$ je trenutni sadržaj trake
- glava stroja se trenutno nalazi na prvom simbolu od v

Kažemo da iz konfiguracije (u, q, v) slijedi konfiguracija (u', q', v') , u oznaci $(u, q, v) \vdash_{\mathcal{M}} (u', q', v')$, ukoliko \mathcal{M} iz konfiguracije (u, q, v) stiže u konfiguraciju (u', q', v') u jednom koraku.

$\vdash_{\mathcal{M}}$ je relacija definirana na skupu svih konfiguracija stroja \mathcal{M} .

Formalna definicija relacije $\vdash_{\mathcal{M}}$

Neka su a, b i $c \in \Gamma$, u i $v \in \Gamma^*$, te q i $q' \in Q$. Tada:

$$\begin{aligned} (ua, q, bv) \vdash_{\mathcal{M}} (u, q', acv) &\Leftrightarrow \delta(q, b) = (q', c, L) \\ (ua, q, bv) \vdash_{\mathcal{M}} (uac, q', v) &\Leftrightarrow \delta(q, b) = (q', c, D) \\ (ua, q, bv) \vdash_{\mathcal{M}} (ua, q', cv) &\Leftrightarrow \delta(q, b) = (q', c, S) \end{aligned}$$

Kažemo da iz konfiguracije (u, q, v) konfiguracija (u', q', v') **dostiživa u k koraka** ako vrijedi $(u, q, v) (\vdash_{\mathcal{M}})^k (u', q', v')$.

Kažemo da iz konfiguracije (u, q, v) konfiguracija (u', q', v') **dostiživa** ako vrijedi $(u, q, v) (\vdash_{\mathcal{M}})^* (u', q', v')$.

- **Početna konfiguracija** stroja \mathcal{M} na ulazu w : (ε, q_0, w)
- Konfiguraciju (u, q, v) nazivamo **prihvatajućom** ako je $q \in F^+$
- Konfiguraciju (u, q, v) nazivamo **odbacujućom** ako je $q \in F^-$

U prihvaćajućoj ili odbacujućoj konfiguraciji stroj **staje**.

Izračunavanje stroja \mathcal{M} na ulazu w je (općenito beskonačan) niz konfiguracija $(C_i)_{i \geq 0}$ takav da vrijedi:

- C_0 je početna konfiguracija od \mathcal{M} na ulazu w
- za sve $i \geq 0$ vrijedi $C_i \vdash_{\mathcal{M}} C_{i+1}$

Izračunavanje nazivamo **prihvatajućim (odbacujućim)** ukoliko je ono konačno, te posljednja konfiguracija u nizu je prihvaćajuća (odbacujuća) konfiguracija.

Zadatak:

- Konstruirajte Turingov stroj koji računa sljedbenika broja na traci zapisanog u binarnom sustavu. Glava stroja na početku rada pozicionirana je na najznačajnijoj znamenici broja.
- Odredite izračunavanje stroja na ulazu 11011.

Kažemo da stroj \mathcal{M} **prihvata (odbacuje)** ulaz w ako postoji prihvaćajuće (odbacujuće) izračunavanje od \mathcal{M} na ulazu w .

Važna napomena

Općenito, tri su mogućnosti za izračunavanje od \mathcal{M} na ulazu w :

- \mathcal{M} prihvaća w
- \mathcal{M} odbacuje w
- \mathcal{M} nikada ne dostiže konfiguraciju u kojoj staje (tj. izračunavanje je beskonačno)

Definicija (Jezik stroja \mathcal{M})

$$L(\mathcal{M}) = \{w \in \Sigma^* \mid \mathcal{M} \text{ prihvaća } w\}$$

Definicija

Kažemo da je jezik $L \subseteq \Sigma^*$ **Turing-prepoznatljiv (ili rekurzivno prebrojiv)** ako postoji **TM** \mathcal{M} t.d. vrijedi:

- za svaki $w \in L$, \mathcal{M} prihvaća w
- za svaki $w \in L^c$, \mathcal{M} ne prihvaća w
($\rightarrow \mathcal{M}$ odbacuje w ili \mathcal{M} ne staje na w)

(tj. $L(\mathcal{M}) = L$)

Definicija

Kažemo da je jezik $L \subseteq \Sigma^*$ (*Turing-*)odlučiv (ili rekurzivan) ako postoji **TM** \mathcal{M} t.d. vrijedi:

- za svaki $w \in L$, \mathcal{M} prihvaća w
- za svaki $w \in L^c$, \mathcal{M} odbacuje w

$\mathbf{R} := \{L \subseteq \Sigma^* \mid L \text{ odlučiv}\}$

$\mathbf{RE} := \{L \subseteq \Sigma^* \mid L \text{ rekurzivno prebrojiv}\}$

$\mathbf{R} \subsetneq \mathbf{RE}$

Zadatak:

- (i) Konstruirajte Turingov stroj koji odlučuje jezik $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ je palindrom}\}$. Glava stroja na početku rada pozicionirana je na najljevijem simbolu.
- (ii) Odredite izračunavanje stroja na ulazu 0010.
- (iii) Odredite izračunavanje stroja na ulazu 101.