

Matematička teorija računarstva

Vježbe 14

Matko Botinčan

PMF – Matematički odjel

02.02.2007.

KSG = PDA

Teorem

$$\{L \subseteq \Sigma^* \mid \exists \text{ KSG } \mathcal{G}. L(\mathcal{G}) = L\} = \{L \subseteq \Sigma^* \mid \exists \text{ PDA } \mathcal{A}. L(\mathcal{A}) = L\}.$$

Napomena za zadatke:

Da bismo dokazali da je jezik L kontekstno slobodan trebamo:

- ili naći **KS** gramatiku \mathcal{G} t.d. $L(\mathcal{G}) = L$
- ili naći **PDA** \mathcal{A} t.d. $L(\mathcal{A}) = L$

Chomskyjeva hijerarhija

Tip gramatika	Pravila produkcije	Klasa jezika
Tip 0	$\alpha \rightarrow \beta$	Rekurzivno prebrojivi
Tip 1	$\alpha A \beta \rightarrow \alpha \gamma \beta$	Kontekstno zavisni
Tip 2	$A \rightarrow \gamma$	Kontekstno slobodni
Tip 3	$A \rightarrow aB$ i $A \rightarrow \varepsilon$	Regularni

Klasa jezika	Tip stroja
Rekurzivno prebrojivi	(N. i D.) Turingovi strojevi
Kontekstno zavisni	Linearno ograničeni (N.) Turingovi strojevi
Kontekstno slobodni	(N.) Potisni automati
Regularni	Konačni automati

Lema o pumpanju za KS jezike

Neka je L kontekstno slobodan jezik. Tada postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da za sve $w \in L$, $|w| \geq n$ postoje u, v, x, y i z sa slijedećim svojstvima:

- $w = uvxyz$
- $|vy| > 0$
- $|vxy| \leq n$
- $\forall i \geq 0 . uv^i xy^i z \in L$ (svojstvo "pumpanja")

Zadatak:

- (a) Dokažite da jezik $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ nije kontekstno slobodan.
- (b) Nađite (kontekstno zavisnu) gramatiku koja generira jezik L .

Zadatak:

Da li je jezik $L = \{a^i b^j c^k \mid 0 \leq i \leq j \leq k\}$ kontekstno slobodan?

Zadatak:

Da li je jezik $L = \{w \cdot w \mid w \in \{0, 1\}^*\}$ kontekstno slobodan?

Zadatak:

Da li je jezik $L = \{1^{F_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, gdje F_n predstavlja n -ti Fibonaccijev broj, kontekstno slobodan?

Zadatak:

Da li je jezik $L = \{a^p \mid p \text{ prost broj}\}$ kontekstno slobodan?

Zadatak.*

Dokažite ili opovrgnite: svaki jezik sa svojstvom da je svaki njegov podskup kontekstno slobodan je nužno konačan.

Zadatak.*

Nađite gramatiku koja generira jezik $L = \{a^{k^2} \mid k \geq 0\}$.
(Hint: $k^2 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1)$).