Matematička teorija računarstva

Vježbe 06

Matko Botinčan

PMF – Matematički odjel

17.11.2006.

Jezici

Jezik nad alfabetom Σ je bilo kakav podskup od Σ^*.

Za jezike $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ definirane su slijedeće operacije:

- $L_1 \cup L_2$
- $L_1 \cap L_2$
- $L_1 \setminus L_2$
- L_1^c
- $L_1 \cdot L_2 := \{u \cdot v \mid u \in L_1,\ v \in L_2\}$ (konkatenacija jezika)
- $L^* := \bigcup_{n=0}^{\infty} L^n$
- $L^+ := \bigcup_{n=1}^{\infty} L^n$

Napomena:

- prazan jezik: $\emptyset$
- jezik koji sadrži praznu riječ: $\{\varepsilon\}$

Zadatak:

Neka su $L, L_1, L_2, L_3, L_4 \subseteq \Sigma^*$ jezici. Tada vrijedi:

- $L_1 \subseteq L_2 \wedge L_3 \subseteq L_4 \Rightarrow L_1 \cdot L_3 \subseteq L_2 \cdot L_4$
- $L_1 \subseteq L_2 \Rightarrow L_1^* \subseteq L_2^*$
- $L^* = L^+ \cup \{\varepsilon\}$
- $L^+ = L \cdot L^*$
- $(L^*)^* = L^*$
- $L_1 \subseteq L_2 \subseteq L_1^* \Rightarrow L_1^* = L_2^*$ (lema o sendviču)

Regularni izrazi

Primjer:

- $(0+1)^*$
- $(0+1) \cdot 0^*$
- $0 \cdot (0+1)^* + (0+1)^* \cdot 1$

Skup regularnih izraza RI_Σ nad alfabetom Σ definiran je induktivno:

- $\emptyset$, ε i svaki $a \in \Sigma$ su regularni izrazi
- ako su u i v regularni izrazi, tada su i:
  - $u + v$
  - $u \cdot v$
  - u^*
  - u^+

  također regularni izrazi

Interpretacija regularnih izraza dana je s $\ell \colon RI_\Sigma \to \mathscr{P}(\Sigma^*)$:

- $\ell[\![\emptyset]\!] = \emptyset$
- $\ell[\![\varepsilon]\!] = \{\varepsilon\}$
- $\ell[\![a]\!] = \{a\}$, $a \in \Sigma$
- $\ell[\![u + v]\!] = \ell[\![u]\!] \cup \ell[\![v]\!]$
- $\ell[\![u \cdot v]\!] = \ell[\![u]\!] \cdot \ell[\![v]\!]$
- $\ell[\![u^*]\!] = \bigcup_{n=0}^{\infty} \ell[\![u^n]\!]$
- $\ell[\![u^+]\!] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \ell[\![u^n]\!]$

Napomena:

- $\ell[\![u^*]\!] = \ell[\![u]\!]^*$
- $\ell[\![u^+]\!] = \ell[\![u]\!]^+$

Zadatak:

Napišite regularni izraz koji opisuje jezik dobro formiranih decimalnih numeričkih konstanti sa ili bez predznaka.
Primjeri riječi iz ovog jezika: `42`, `3.14159`, `+5.`, `-0.01`.

Zadatak:

Dokažite da vrijedi:

(i) $a(a + ba)^* = (ab + a)^* a$

(ii) $b^*(a + bb)^* = (b + \varepsilon)(a + bb)^*$

(iii) $(a^+ + b^*)(a^* + b^+) = a^+ b^+ + b^* a^*$

(iv) $(aab^* + b^+ + b^+ aa)^* = (aa + b)^+$

Zadatak:

Napišite regularne izraze nad alfabetom $\Sigma = \{0, 1\}$ za slijedeće jezike:

(i) $\{w \mid w$ sadrži točno jedan simbol $1\}$

(ii) $\{w \mid w$ sadrži barem jedan simbol $1\}$

(iii) $\{w \mid w$ sadrži 001 kao podstring$\}$

(iv) $\{w \mid w$ je parne duljine$\}$

(v) $\{w \mid |w|$ je višekratnik od $k \in \mathbb{N}\}$

(vi) $\{w \mid w$ počinje i završava istim simbolom$\}$

(vii) $\{w \mid w$ ne sadrži dvije uzastopne jedinice$\}$

Regularni jezici

Definicija

Jezik $L \subseteq \Sigma^*$ je regularan ako postoji $u \in RI_\Sigma$ takav da $L = \ell[\![u]\!]$.

Posljedica

Klasa regularnih jezika je najmanja klasa jezika koja sadržava sve konačne jezike i zatvorena je za operacije $\cup$, $\cdot$, i *.

Jezične jednadžbe

Teorem (Ardenova lema)

Najmanje rješenje desno linearne jednadžbe $x = ax + b$ (gdje su a i b jezici, a x je nepoznat jezik) je a^*b. Ako dodatno vrijedi $\varepsilon \notin a$, ovo rješenje je jedinstveno.

Posljedica

Ako su a i b regularni jezici, onda je i najmanje rješenje jednadžbe $x = ax + b$ regularni jezik.

Zadatak:

Riješite jezičnu jednadžbu:

$$x = 1x + 0x + 1$$

Zadatak:

Odredite jezike x i y takve da vrijedi:

$$\begin{aligned} x &= 1x + 0y + 1 \\ y &= 0x + 1y + 0 \end{aligned}$$

Reziduali

Rezidual riječi v u jeziku $L \subseteq \Sigma^*$ definiran je s:

$$v^{-1}L := \{w \mid v \cdot w \in L\}$$

Teorem (o rezidualima)

Jezik je regularan ako i samo ako je $\{v^{-1}L \mid v \in \Sigma^*\}$ konačan.

Zadatak:

Korištenjem teorema o rezidualima dokažite da jezik $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ nije regularan.