Matematička teorija računarstva

Vježbe 04

Matko Botinčan

PMF – Matematički odjel

3.11.2006.

Zadatak:

Odredite fiksnu točku operatora $\varphi \colon \mathscr{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \to \mathscr{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ definiranog na slijedeći način:

$$\begin{aligned}\varphi(X) &= \{(n, m_1+m_2) \mid n \geq 2 \text{ i } (n-1, m_1), (n-2, m_2) \in X\} \\ &\quad \cup \{(0,0),(1,1)\}\end{aligned}$$

Da li je fiksna točka jedinstvena?

Teorem (o rekurziji)

Neka je $(A, <)$ dobro utemeljen skup, S proizvoljan skup, te $F\colon \{f\colon x_< \to S \mid x \in A\} \to S$. Tada postoji jedinstvena funkcija $f\colon A \to S$ takva da vrijedi $f(x) = F(f|_{x_<})$.

Korolar (Dedekindov teorem o rekurziji)

Neka je $F\colon \{f\colon n \to S \mid n \in \omega\} \to S$. Tada postoji jedinstvena funkcija $f\colon \omega \to S$ takva da vrijedi $f(n) = F(f|_n)$.
(Podsjetnik: $0 \equiv \emptyset$, $n \equiv \{0, 1, \ldots, n-1\}$)

Definicija: Operator $\varphi\colon \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(A)$ je neprekidan ako
$\forall X \subseteq A \,.\, \forall x \in A \,.\, x \in \varphi(X) \Leftrightarrow \exists Z \subseteq_{\mathrm{fin}} X$ t.d. $x \in \varphi(Z)$.

Napomena: Svaki neprekidni operator je monoton.

Primjer:

(i) operator $\mathrm{id}\colon \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(A)$ dan s $\mathrm{id}(X) := X$ je neprekidan

(ii) operator $\mathrm{kv}\colon \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ dan s $\mathrm{kv}(X) := \{m^2 \mid m \in X\}$ je neprekidan

(iii) operator $\mathrm{db}\colon \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ dan s $\mathrm{db}(X) := X \cup \{2m \mid m \in X\} = X \cup 2X$ je neprekidan

Zadatak:

Odredite da li je $\varphi\colon \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ neprekidan operator ako je:

(i) $\varphi(X) = \begin{cases} X, & \text{ako je } X \text{ beskonačan} \\ \emptyset, & \text{inače} \end{cases}$

(ii) $\varphi(X) = \begin{cases} X, & \text{ako je } X \text{ beskonačan} \\ X \cup \{|X|\}, & \text{inače} \end{cases}$

(iii) $\varphi(X) = \begin{cases} X, & \text{ako je } X \text{ beskonačan} \\ X \setminus \{|X|\}, & \text{inače} \end{cases}$

(iv) $\varphi(X) = \begin{cases} X, & \text{ako je } X \text{ konačan} \\ \mathbb{N}, & \text{inače} \end{cases}$

Zadatak:

Neka je $a \in \mathbb{N}$. Da li je operator $f_a \colon \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ definiran s

$$f_a(X) = \begin{cases} X, & \text{ako } a \notin X \\ \mathbb{N} \setminus X, & \text{ako } a \in X \end{cases}$$

neprekidan?

Zadatak:

Odredite da li je operator $f\colon \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ neprekidan ako je:

(i) $$f(X) = \begin{cases} \emptyset, & \text{za } X = \emptyset \\ X - \min X, & \text{za } \min X > 0 \\ 3X + 1, & \text{za } \min X = 0 \end{cases}$$

(ii) $$f(X) = \begin{cases} X - 1, & \text{ako } 0 \notin X \\ X \setminus \{0\}, & \text{ako } 0 \in X \end{cases}$$

(iii) $$f(X) = \begin{cases} \{1\}, & \text{ako je } X = \emptyset \\ X \cup \{\max X + 1\}, & \text{ako je } X \text{ konačan} \\ X, & \text{inače} \end{cases}$$

$\boxed{\text{Definicija:}}$ Neka je $\varphi\colon \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(A)$ monoton operator, te definirajmo za $B \subseteq A$ operator $\varphi_B(X) := B \cup \varphi(X)$.
φ-zatvorenje skupa B je najmanja fiksna točka $\mu(\varphi_B)$ od φ_B (najmanji φ-zatvoren skup koji sadrži B).

$\boxed{\text{Primjer:}}$

Neka je $R \subseteq A \times A$ relacija. Definirajmo operator $\varphi\colon \mathscr{P}(A \times A) \to \mathscr{P}(A \times A)$ s $\varphi(X) := X \circ R$. Tada vrijedi:

- φ-zatvorenje od R je R^+
- φ-zatvorenje od I je R^*

Zadatak:

Neka je $f\colon \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ operator definiran s $f(X) := \{\varphi(x) \mid x \in X\}$, pri čemu je funkcija $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dana s

$$\varphi(X) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & \text{ako je } x \text{ paran} \\ 3x+1, & \text{ako je } x \text{ neparan} \end{cases}.$$

Dokažite da je f neprekidan, te odredite f-zatvorenje skupa $\{1, 3\}$.