

Matematička teorija računarstva

Vježbe 04

Matko Botinčan

PMF – Matematički odjel

3.11.2006.

Zadatak:

Odredite fiksnu točku operatora $\varphi: \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ definiranog na slijedeći način:

$$\varphi(X) = \{(n, m_1 + m_2) \mid n \geq 2 \text{ i } (n-1, m_1), (n-2, m_2) \in X\} \cup \{(0, 0), (1, 1)\}$$

Da li je fiksna točka jedinstvena?

Teorem (o rekurziji)

Neka je $(A, <)$ dobro utemeljen skup, S proizvoljan skup, te $F: \{f: x_{<} \rightarrow S \mid x \in A\} \rightarrow S$. Tada postoji jedinstvena funkcija $f: A \rightarrow S$ takva da vrijedi $f(x) = F(f|_{x_{<}})$.

Korolar (Dedekindov teorem o rekurziji)

Neka je $F: \{f: n \rightarrow S \mid n \in \omega\} \rightarrow S$. Tada postoji jedinstvena funkcija $f: \omega \rightarrow S$ takva da vrijedi $f(n) = F(f|_n)$.
(Podsjetnik: $0 \equiv \emptyset$, $n \equiv \{0, 1, \dots, n-1\}$)

Definicija: Operator $\varphi: \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ je **neprekidan** ako $\forall X \subseteq A. \forall x \in A. x \in \varphi(X) \Leftrightarrow \exists Z \subseteq_{\text{fin}} X$ t.d. $x \in \varphi(Z)$.

Napomena: Svaki neprekidni operator je monoton.

Primjer:

- (i) operator $\text{id}: \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ dan s $\text{id}(X) := X$ je neprekidan
- (ii) operator $\text{kv}: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dan s $\text{kv}(X) := \{m^2 \mid m \in X\}$ je neprekidan
- (iii) operator $\text{db}: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dan s $\text{db}(X) := X \cup \{2m \mid m \in X\} = X \cup 2X$ je neprekidan

Zadatak:

Odredite da li je $\varphi: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ neprekidan operator ako je:

- (i) $\varphi(X) = \begin{cases} X, & \text{ako je } X \text{ beskonačan} \\ \emptyset, & \text{inače} \end{cases}$
- (ii) $\varphi(X) = \begin{cases} X, & \text{ako je } X \text{ beskonačan} \\ X \cup \{|X|\}, & \text{inače} \end{cases}$
- (iii) $\varphi(X) = \begin{cases} X, & \text{ako je } X \text{ beskonačan} \\ X \setminus \{|X|\}, & \text{inače} \end{cases}$
- (iv) $\varphi(X) = \begin{cases} X, & \text{ako je } X \text{ konačan} \\ \mathbb{N}, & \text{inače} \end{cases}$

Zadatak:

Neka je $a \in \mathbb{N}$. Da li je operator $f_a: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ definiran s

$$f_a(X) = \begin{cases} X, & \text{ako } a \notin X \\ \mathbb{N} \setminus X, & \text{ako } a \in X \end{cases}$$

neprekidan?

Zadatak:

Odredite da li je operator $f: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ neprekidan ako je:

- (i) $f(X) = \begin{cases} \emptyset, & \text{za } X = \emptyset \\ X - \min X, & \text{za } \min X > 0 \\ 3X + 1, & \text{za } \min X = 0 \end{cases}$
- (ii) $f(X) = \begin{cases} X - 1, & \text{ako } 0 \notin X \\ X \setminus \{0\}, & \text{ako } 0 \in X \end{cases}$
- (iii) $f(X) = \begin{cases} \{1\}, & \text{ako je } X = \emptyset \\ X \cup \{\max X + 1\}, & \text{ako je } X \text{ konačan} \\ X, & \text{inače} \end{cases}$

Definicija: Neka je $\varphi: \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ monoton operator, te definirajmo za $B \subseteq A$ operator $\varphi_B(X) := B \cup \varphi(X)$. φ -zatvorenje skupa B je najmanja fiksna točka $\mu(\varphi_B)$ od φ_B (najmanji φ -zatvoren skup koji sadrži B).

Primjer:

Neka je $R \subseteq A \times A$ relacija. Definirajmo operator $\varphi: \mathcal{P}(A \times A) \rightarrow \mathcal{P}(A \times A)$ s $\varphi(X) := X \circ R$. Tada vrijedi:

- φ -zatvorenje od R je R^+
- φ -zatvorenje od I je R^*

Zadatak:

Neka je $f: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ operator definiran s
 $f(X) := \{\varphi(x) \mid x \in X\}$, pri čemu je funkcija $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dana s

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & \text{ako je } x \text{ paran} \\ 3x + 1, & \text{ako je } x \text{ neparan} \end{cases} .$$

Dokažite da je f neprekidan, te odredite f -zatvorenje skupa $\{1, 3\}$.