

Matematička teorija računarstva

Vježbe 03

Matko Botinčan

PMF – Matematički odjel

27.10.2006.

Indukcija i rekurzija

Definicija (Princip indukcije)

$$\forall x . ((\forall y < x) . P(y) \Rightarrow P(x)) \Rightarrow \forall z . P(z)$$

Teorem

(A, <) je dobro utemeljen akko za njega vrijedi princip indukcije.

Zadatak:

Morrisova 91-funkcija definirana je na slijedeći način:

$$f(m) = \begin{cases} m - 10, & \text{ako je } m > 100 \\ f(f(m + 11)), & \text{inače} \end{cases}$$

Dokažite da vrijedi:

$$f(m) = \begin{cases} m - 10, & \text{ako je } m > 100 \\ 91, & \text{inače} \end{cases}$$

Zadatak:

Funkcija $B: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definirana je na slijedeći način:

$$B(0, y) = 2 + y$$

$$B(x + 1, 0) = \text{signum}(x)$$

$$B(x + 1, y + 1) = B(x, B(x + 1, y))$$

Provjerite da vrijedi $B(1, y) = 2y$ i $B(2, y) = 2^y$.

Čemu je jednako $B(3, y)$?

Dokažite da vrijede slijedeće tvrdnje:

- (i) $(x, y) \neq (1, 0) \Rightarrow B(x, y) > y$
- (ii) $B(x + 1, y + 2) \geq B(x + 1, y + 1)$
- (iii) $B(x + 2, y) \geq 2^y$

Fiksne točke

Definicija: Operator $\varphi: \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ je **monoton** ako $\forall X, Y . X \subseteq Y \Rightarrow \varphi(X) \subseteq \varphi(Y)$.

Definicija:

- $X \subseteq A$ je **φ -zatvoren** ako $\varphi(X) \subseteq X$
- $X \subseteq A$ je **φ -gust** ako $X \subseteq \varphi(X)$
- $X \subseteq A$ je **fiksna (čvrsta) točka** od φ ako $X = \varphi(X)$

Zadatak:

Odredite da li je $\varphi: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ monoton operator ako je:

$$(i) \varphi(X) = \begin{cases} X, & \text{ako je } X \text{ beskonačan} \\ \emptyset, & \text{inače} \end{cases}$$

$$(ii) \varphi(X) = \begin{cases} X, & \text{ako je } X \text{ beskonačan} \\ X \cup \{|X|\}, & \text{inače} \end{cases}$$

$$(iii) \varphi(X) = \begin{cases} X, & \text{ako je } X \text{ beskonačan} \\ X \setminus \{|X|\}, & \text{inače} \end{cases}$$

$$(iv) \varphi(X) = \begin{cases} X, & \text{ako je } X \text{ konačan} \\ \mathbb{N}, & \text{inače} \end{cases}$$

Teorem: (Knaster-Tarski)

Za svaki monotoni operator $\varphi: \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ postoje najmanja fiksna točka $\mu(\varphi)$ i najveća fiksna točka $\nu(\varphi)$, te su one dane s:

$$\mu(\varphi) = \bigcap \{X \in \mathcal{P}(A) \mid \varphi(X) \subseteq X\},$$

$$\nu(\varphi) = \bigcup \{X \in \mathcal{P}(A) \mid X \subseteq \varphi(X)\}.$$

→ $\mu(\varphi)$ je najmanji φ -zatvoreni skup

$\nu(\varphi)$ je najveći φ -gusti skup

Neka je $\varphi: \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ monotoni operator. Najmanju i najveću fiksnu točku možemo induktivno konstruirati sukcesivnim aproksimacijama:

$$\begin{aligned}\varphi_0 &:= \emptyset, \\ \varphi_{\alpha+1} &:= \varphi(\varphi_\alpha), \\ \varphi_\lambda &:= \bigcup_{\alpha < \lambda} \varphi_\alpha, \quad \text{za granični ordinal } \lambda.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_0^* &:= A, \\ \varphi_{\alpha+1}^* &:= \varphi(\varphi_\alpha^*), \\ \varphi_\lambda^* &:= \bigcap_{\alpha < \lambda} \varphi_\alpha^*, \quad \text{za granični ordinal } \lambda.\end{aligned}$$

Zadatak:

Neka je $\varphi: \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ monotoni operator. Označimo s $\varphi': \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ tzv. **dualni operator** operatora φ definiran s $\varphi'(X) := \varphi(X^c)^c$. Dokažite da vrijede slijedeće tvrdnje:

- (i) Dualni operator φ' je monoton
- (ii) $\mu(\varphi) = \nu(\varphi')^c$
 $\nu(\varphi) = \mu(\varphi')^c$

Zadatak:*

Neka je $\varphi: \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ monotoni operator koji je bijekcija. Da li je tada i operator $\varphi^{-1}: \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ također monoton?