Matematička teorija računarstva

Vježbe 03

Matko Botinčan

PMF – Matematički odjel

27.10.2006.

Indukcija i rekurzija

Definicija (Princip indukcije)

$$\forall x\,.\,((\forall y < x)\,.\,P(y) \Rightarrow P(x)) \Rightarrow \forall z\,.\,P(z)$$

Teorem

$(A, <)$ je dobro utemeljen akko za njega vrijedi princip indukcije.

Zadatak:

Morrisova 91-funkcija definirana je na slijedeći način:

$$f(m) = \begin{cases} m - 10, & \text{ako je } m > 100 \\ f(f(m+11)), & \text{inače} \end{cases}$$

Dokažite da vrijedi:

$$f(m) = \begin{cases} m - 10, & \text{ako je } m > 100 \\ 91, & \text{inače} \end{cases}$$

Zadatak:

Funkcija $B : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definirana je na slijedeći način:

$$\begin{aligned} B(0, y) &= 2 + y \\ B(x+1, 0) &= \text{signum}(x) \\ B(x+1, y+1) &= B(x, B(x+1, y)) \end{aligned}$$

Provjerite da vrijedi $B(1, y) = 2y$ i $B(2, y) = 2^y$.

Čemu je jednako $B(3, y)$?

Dokažite da vrijede slijedeće tvrdnje:

(i) $(x, y) \neq (1, 0) \Rightarrow B(x, y) > y$

(ii) $B(x+1, y+2) \geq B(x+1, y+1)$

(iii) $B(x+2, y) \geq 2^y$

Fiksne točke

Definicija: Operator $\varphi\colon \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(A)$ je monoton ako $\forall X, Y\ .\ X \subseteq Y \Rightarrow \varphi(X) \subseteq \varphi(Y)$.

Definicija:

- $X \subseteq A$ je φ-zatvoren ako $\varphi(X) \subseteq X$
- $X \subseteq A$ je φ-gust ako $X \subseteq \varphi(X)$
- $X \subseteq A$ je fiksna (čvrsta) točka od φ ako $X = \varphi(X)$

Zadatak:

Odredite da li je $\varphi\colon \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ monoton operator ako je:

(i) $\varphi(X) = \begin{cases} X, & \text{ako je } X \text{ beskonačan} \\ \emptyset, & \text{inače} \end{cases}$

(ii) $\varphi(X) = \begin{cases} X, & \text{ako je } X \text{ beskonačan} \\ X \cup \{|X|\}, & \text{inače} \end{cases}$

(iii) $\varphi(X) = \begin{cases} X, & \text{ako je } X \text{ beskonačan} \\ X \setminus \{|X|\}, & \text{inače} \end{cases}$

(iv) $\varphi(X) = \begin{cases} X, & \text{ako je } X \text{ konačan} \\ \mathbb{N}, & \text{inače} \end{cases}$

Teorem: (Knaster-Tarski)

Za svaki monotoni operator $\varphi\colon \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(A)$ postoje najmanja fiksna točka $\mu(\varphi)$ i najveća fiksna točka $\nu(\varphi)$, te su one dane s:

$$\begin{aligned} \mu(\varphi) &= \bigcap \{X \in \mathscr{P}(A) \mid \varphi(X) \subseteq X\}, \\ \nu(\varphi) &= \bigcup \{X \in \mathscr{P}(A) \mid X \subseteq \varphi(X)\}. \end{aligned}$$

$\to$ $\mu(\varphi)$ je najmanji φ-zatvoreni skup
$\nu(\varphi)$ je najveći φ-gusti skup

Neka je $\varphi\colon \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(A)$ monotoni operator. Najmanju i najveću fiksnu točku možemo induktivno konstruirati sukcesivnim aproksimacijama:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &:= \emptyset, \\ \varphi_{\alpha+1} &:= \varphi(\varphi_\alpha), \\ \varphi_\lambda &:= \bigcup_{\alpha<\lambda} \varphi_\alpha, \quad \text{za granični ordinal } \lambda. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi^*_0 &:= A, \\ \varphi^*_{\alpha+1} &:= \varphi(\varphi^*_\alpha), \\ \varphi^*_\lambda &:= \bigcap_{\alpha<\lambda} \varphi^*_\alpha, \quad \text{za granični ordinal } \lambda. \end{aligned}$$

Zadatak:

Neka je $\varphi\colon \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(A)$ monotoni operator. Označimo s $\varphi'\colon \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(A)$ tzv. dualni operator operatora φ definiran s $\varphi'(X) := \varphi(X^c)^c$. Dokažite da vrijede slijedeće tvrdnje:

(i) Dualni operator φ' je monoton

(ii) $\mu(\varphi) = \nu(\varphi')^c$
$\nu(\varphi) = \mu(\varphi')^c$

Zadatak:*

Neka je $\varphi\colon \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(A)$ monotoni operator koji je bijekcija. Da li je tada i operator $\varphi^{-1}\colon \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(A)$ također monoton?