

# Matematička teorija računarstva

## Vježbe 02

Matko Botinčan

PMF – Matematički odjel

20.10.2006.

## Relacije uređaja

- preduređaj — refleksivna i tranzitivna relacija
- parcijalni uređaj — refleksivna, tranzitivna i antisimetrična relacija (oznaka:  $\leq$ ) ( $\leq^T$  označavamo  $\geq$ )
- striktni parcijalni uređaj — irefleksivna i tranzitivna relacija (oznaka:  $<$ )
- linearni (totalni) uređaj — parcijalni uređaj kod kojeg su svaka dva elementa u relaciji

### Napomena:

- $R$  parcijalni uređaj  $\Rightarrow R \cap I^c$  striktni parcijalni uređaj
- $R$  striktni parcijalni uređaj  $\Rightarrow R \cup I$  parcijalni uređaj
- parcijalni uređaj  $R$  je linearan  $\Leftrightarrow R \cup R^T = A$

Zadatak:

Neka su  $\leq$  i  $<$  standardni uređaji na skupu  $\mathbb{N}$ .  
Dokažite da vrijede slijedeće tvrdnje:

- (i)  $< \circ < \subsetneq <$
- (ii)  $\leq \circ < = <$
- (iii)  $\leq \circ \geq = \mathbb{N}^2$

Kažemo da je  $(A, \leq)$  parcijalno uređen skup ako je  $\leq \subseteq A \times A$  relacija parcijalnog uređaja.

Neka je  $(A, \leq)$  parcijalno uređen skup,  $X \subseteq A$  i  $a \in A$ .

- $a$  je **gornja međa** za  $X$  ako  $\forall x \in X. x \leq a$   
 $a$  je **donja međa** za  $X$  ako  $\forall x \in X. a \leq x$
- $a$  je **najveći** element u  $X$  ako  $\forall x \in X. x \leq a$  i  $a \in X$   
 $a$  je **najmanji** element u  $X$  ako  $\forall x \in X. a \leq x$  i  $a \in X$
- $a$  je **maksimalni** element u  $X$  ako  $\neg \exists x \in X. a < x$  i  $a \in X$   
 $a$  je **minimalni** element u  $X$  ako  $\neg \exists x \in X. x < a$  i  $a \in X$
- $a$  je **supremum** za  $X$  ako je  $a$  najmanji element u skupu svih gornjih međa za  $X$   
 $a$  je **infimum** za  $X$  ako je  $a$  najveći element u skupu svih donjih međa za  $X$

**Napomena:**

- U linearno uređenom skupu (**lus**-u) minimalni (maksimalni) element je ujedno i najmanji (najveći).
- U parcijalno uređenom skupu (**pus**-u) minimalni (maksimalni) elementi su ili identični ili neusporedivi.
- Svaki **pus** sadrži najviše jedan najveći (najmanji) element.
- Najveći (najmanji) element **pus**-a je njegov jedinstven maksimalni (minimalni) element.
- Postoji **pus** koji ima jedinstveni minimalni (maksimalni) element, a nema najmanjeg (najvećeg) elementa.

Primjer:

Neka je  $(S, \leq)$  neprazan **lus**. ( $S$  ćemo zvati “alfabet”)

- riječ je uređena  $n$ -torka  $w := (a_1, \dots, a_n) \in S^n$  ( $S^0 = \{\varepsilon\}$ )  
 $w$  kraće zapisujemo  $a_1 \dots a_n$
- $|w|$  — duljina riječi  $w$  (broj simbola od kojih se sastoji  $w$ )
- $\varepsilon$  — prazna riječ ( $|\varepsilon| = 0$ )
- $S^* := \bigcup_{n \geq 0} S^n$  — skup svih riječi nad alfabetom  $S$   
 $S^+ := \bigcup_{n \geq 1} S^n = S^* \setminus \{\varepsilon\}$
- konkatencija — binarna operacija na  $S^*$   
 za  $u = u_1 \dots u_r$  i  $v = v_1 \dots v_s$  def.  $u \cdot v := u_1 \dots u_r v_1 \dots v_s$   
 $\rightarrow \forall w. w \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot w = w$  ( $\varepsilon$  je jedinica u monoidu  $(S^*, \cdot)$ )
- leksikografski uređaj na  $S^*$ :  
 $u < v \Leftrightarrow \exists k \leq \min\{|u|, |v|\}$  t.d.  $\forall i < k. u_i = v_i$  i  $u_k < v_k$   
 ili  $u$  je pravi prefiks od  $v$  (tj.  $\exists w \in S^+$  t.d.  $v = u \cdot w$ )
- $u \leq v \Leftrightarrow u < v$  ili  $u = v$

## Zadatak:

Označimo s  $\prec$  relaciju “biti pravi prefix” koja je za  $u, v \in S^*$  definirana s  $u \prec v \Leftrightarrow \exists w \in S^+ \text{ t.d. } v = u \cdot w$ , te neka vrijedi  $u \preceq v \Leftrightarrow u \prec v \text{ ili } u = v$ . Tada je  $(S^*, \preceq)$  **pus**.

## Zadatak:

$(S^*, \leq)$  je **pus**.

## Zadatak:

$(S^*, \leq)$  je **lus**.

## Dobro utemeljeni i dobro uređeni skupovi

**Definicija:**  $(A, <)$  je **dobro utemeljen** skup ako u  $A$  nema beskonačnih padajućih lanaca.

**Teorem:**  $(A, <)$  je dobro utemeljen akko  
 $\forall X \subseteq A . X \neq \emptyset \Rightarrow X$  sadrži minimalni element.

**Definicija:**  $(A, <)$  je **dobro uređen** skup ako  
 $\forall X \subseteq A . X \neq \emptyset \Rightarrow X$  sadrži najmanji element.

**Teorem:**  $(A, <)$  je dobro uređen akko je on dobro utemeljen i linearno uređen.



Zadatak:

$(S^*, <)$  je dobro utemeljen skup.

Zadatak:

Da li je  $(S^*, <)$  dobro uređen skup?

Zadatak:

- (i)  $(S^n, <)$  je dobro uređen skup.
- (ii) Definirajmo  $L_n := \bigcup_{k=0}^n S^k$ .  
Tada je  $(L_n, <)$  dobro uređen skup.

**Zadatak:**

U kutiji se nalazi konačno mnogo kuglica na svakoj od kojih je zapisan jedan prirodni broj. Ponavljamo korake koji se sastoje od slijedećih dviju akcija:

- iz kutije izvučemo jednu kuglicu; označimo s  $k$  broj koji je zapisan na izvučenoj kuglici;
- u kutiju stavimo  $k$  kuglica na kojima su zapisani brojevi  $0, 1, 2, \dots, k - 1$ .

Dokažite ili opovrgnite: nakon konačno mnogo koraka kutija će biti prazna.