# Matematička teorija računarstva

## Vježbe 02

Matko Botinčan

PMF – Matematički odjel

20.10.2006.



## Relacije uređaja

- preduređaj — refleksivna i tranzitivna relacija
- parcijalni uređaj — refleksivna, tranzitivna i antisimetrična relacija (oznaka: $\leq$) ($\leq^\tau$ označavamo $\geq$)
- striktni parcijalni uređaj — irefleksivna i tranzitivna relacija (oznaka: $<$)
- linearni (totalni) uređaj — parcijalni uređaj kod kojeg su svaka dva elementa u relaciji

Napomena:

- $R$ parcijalni uređaj $\Rightarrow$ $R \cap I^c$ striktni parcijalni uređaj
- $R$ striktni parcijalni uređaj $\Rightarrow$ $R \cup I$ parcijalni uređaj
- parcijalni uređaj $R$ je linearan $\Leftrightarrow$ $R \cup R^\tau = A$



Zadatak:

Neka su $\leq$ i $<$ standardni uređaji na skupu $\mathbb{N}$.
Dokažite da vrijede slijedeće tvrdnje:

(i) $< \circ < \quad \subsetneq \quad <$

(ii) $\leq \circ < \quad = \quad <$

(iii) $\leq \circ \geq \quad = \quad \mathbb{N}^2$



Kažemo da je $(A, \leq)$ parcijalno uređen skup ako je $< \subseteq A \times A$ relacija parcijalnog uređaja.

Neka je $(A, \leq)$ parcijalno uređen skup, $X \subseteq A$ i $a \in A$.

- $a$ je gornja međa za $X$ ako $\forall x \in X \,.\, x \leq a$
  $a$ je donja međa za $X$ ako $\forall x \in X \,.\, a \leq x$
- $a$ je najveći element u $X$ ako $\forall x \in X \,.\, x \leq a$ i $a \in X$
  $a$ je najmanji element u $X$ ako $\forall x \in X \,.\, a \leq x$ i $a \in X$
- $a$ je maksimalni element u $X$ ako $\neg \exists x \in X \,.\, a < x$ i $a \in X$
  $a$ je minimalni element u $X$ ako $\neg \exists x \in X \,.\, x < a$ i $a \in X$
- $a$ je supremum za $X$ ako je $a$ najmanji element u skupu svih gornjih međa za $X$
  $a$ je infimum za $X$ ako je $a$ najveći element u skupu svih donjih međa za $X$

**Napomena:**

- U linearno uređenom skupu (**lus**-u) minimalni (maksimalni) element je ujedno i najmanji (najveći).
- U parcijalno uređenom skupu (**pus**-u) minimalni (maksimalni) elementi su ili identični ili neusporedivi.
- Svaki **pus** sadrži najviše jedan najveći (najmanji) element.
- Najveći (najmanji) element **pus**-a je njegov jedinstven maksimalni (minimalni) element.
- Postoji **pus** koji ima jedinstveni minimalni (maksimalni) element, a nema najmanjeg (najvećeg) elementa.



**Primjer:**

Neka je $(S, \leq)$ neprazan **lus**. ($S$ ćemo zvati "alfabet")

- riječ je uređena $n$-torka $w := (a_1, \ldots, a_n) \in S^n$ $\quad (S^0 = \{\varepsilon\})$
  $w$ kraće zapisujemo $a_1 \ldots a_n$
- $|w|$ — duljina riječi $w$ (broj simbola od kojih se sastoji $w$)
- $\varepsilon$ — prazna riječ ($|\varepsilon| = 0$)
- $S^* := \bigcup_{n \geq 0} S^n$ — skup svih riječi nad alfabetom $S$
  $S^+ := \bigcup_{n \geq 1} S^n = S^* \setminus \{\varepsilon\}$
- konkatenacija — binarna operacija na $S^*$
  za $u = u_1 \ldots u_r$ i $v = v_1 \ldots v_s$ def. $u \cdot v := u_1 \ldots u_r v_1 \ldots v_s$
  $\rightarrow \forall w \,.\, w \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot w = w$ $\quad$ ($\varepsilon$ je jedinica u monoidu $(S^*, \cdot)$)
- leksikografski uređaj na $S^*$:
  $u < v \Leftrightarrow \exists k \leq \min\{|u|, |v|\}$ t.d. $\forall i < k \,.\, u_i = v_i$ i $u_k < v_k$
  ili $u$ je pravi prefiks od $v$ (tj. $\exists w \in S^+$ t.d. $v = u \cdot w$)
- $u \leq v \Leftrightarrow u < v$ ili $u = v$



**Zadatak:**

Označimo s $\prec$ relaciju "biti pravi prefix" koja je za $u, v \in S^*$ definirana s $u \prec v \Leftrightarrow \exists w \in S^+$ t.d. $v = u \cdot w$, te neka vrijedi $u \preceq v \Leftrightarrow u \prec v$ ili $u = v$. Tada je $(S^*, \preceq)$ **pus**.

**Zadatak:**

$(S^*, \leq)$ je **pus**.

**Zadatak:**

$(S^*, \leq)$ je **lus**.



## Dobro utemeljeni i dobro uređeni skupovi

**Definicija:** $(A, <)$ je dobro utemeljen skup ako u $A$ nema beskonačnih padajućih lanaca.

**Teorem:** $(A, <)$ je dobro utemeljen akko $\forall X \subseteq A \,.\, X \neq \emptyset \Rightarrow X$ sadrži miminalni element.

**Definicija:** $(A, <)$ je dobro uređen skup ako $\forall X \subseteq A \,.\, X \neq \emptyset \Rightarrow X$ sadrži najmanji element.

**Teorem:** $(A, <)$ je dobro uređen akko je on dobro utemeljen i linearno uređen.

Zadatak:

$(S^*, \prec)$ je dobro utemeljen skup.

Zadatak:

Da li je $(S^*, <)$ dobro uređen skup?

Zadatak:

(i) $(S^n, <)$ je dobro uređen skup.
(ii) Definirajmo $L_n := \bigcup_{k=0}^{n} S^k$.
Tada je $(L_n, <)$ dobro uređen skup.



Zadatak:

U kutiji se nalazi konačno mnogo kuglica na svakoj od kojih je zapisan jedan prirodni broj. Ponavljamo korake koji se sastoje od slijedećih dviju akcija:

- iz kutije izvučemo jednu kuglicu; označimo s $k$ broj koji je zapisan na izvučenoj kuglici;
- u kutiju stavimo $k$ kuglica na kojima su zapisani brojevi $0, 1, 2, \ldots, k-1$.

Dokažite ili opovrgnite: nakon konačno mnogo koraka kutija će biti prazna.