Matematička teorija računarstva

Vježbe 01

Matko Botinčan

PMF – Matematički odjel

13.10.2006.

Relacije

Osnovna terminologija:

- n-arna heterogena relacija: $R \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n$
- Binarna heterogena relacija: $R \subseteq A \times B$
- Binarna homogena relacija: $R \subseteq A \times A$
- Notacija za "biti u relaciji": $(x, y) \in R$ ili xRy
- Neke istaknute relacije:
  - prazna relacija: $\emptyset$
  - univerzalna relacija: $\mathcal{U} = A \times B$
  - identiteta: $I = \{(x, x) \mid x \in A\}$

Važne oznake:

- za $R \subseteq A \times B$ s $R^c \subseteq A \times B$ označavamo komplement relacije R definiran s $R^c := \{(x, y) \in A \times B \mid \neg xRy\}$
- za $R \subseteq A \times B$ s $R^\tau \subseteq B \times A$ označavamo transponent relacije R definiran s $R^\tau := \{(y, x) \in B \times A \mid xRy\}$
- za $R \subseteq A \times B$ i $S \subseteq B \times C$ s $S \circ R \subseteq A \times C$ označavamo kompoziciju relacije S s relacijom R definiranu s $S \circ R := \{(x, z) \in A \times C \mid \exists y \in B \,.\, xRy \ \wedge \ ySz\}$

Napomena:

- $R \subseteq S \Rightarrow R^{\tau} \subseteq S^{\tau}$
- $R \subseteq S \Rightarrow R^{c} \supseteq S^{c}$
- $(R \cup S)^{\tau} = R^{\tau} \cup S^{\tau}$
- $(R \cap S)^{\tau} = R^{\tau} \cap S^{\tau}$
- $(R^{\tau})^{\tau} = R$
- $(S \circ R)^{\tau} = R^{\tau} \circ S^{\tau}$
- $P \subseteq Q \wedge R \subseteq S \Rightarrow PR \subseteq QS$

Svojstva relacija $R \subseteq A \times A$

- Refleksivnost: $\forall x \,.\, xRx$
- Irefleksivnost: $\forall x \,.\, \neg xRx$
- Simetričnost: $\forall x \forall y \,.\, xRy \Rightarrow yRx$
- Antisimetričnost: $\forall x \forall y \,.\, xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$
- Tranzitivnost: $\forall x \forall y \forall z \,.\, xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$
- Relacija ekvivalencije $\equiv$ refleksivna $+$ simetrična $+$ tranzitivna

Napomena:

- R je refleksivna $\Leftrightarrow I \subseteq R \Leftrightarrow R \cup I \subseteq R$
- R je irefleksivna $\Leftrightarrow R \subseteq I^c \Leftrightarrow R \cap I = \emptyset$
- R je simetrična $\Leftrightarrow R \subseteq R^\tau \Leftrightarrow R = R^\tau$
- R je antisimetrična $\Leftrightarrow R \cap R^\tau \subseteq I$
- R je tranzitivna $\Leftrightarrow R^2 \subseteq R$

$\boxed{\text{Zadatak:}}$

Neka su R i S simetrične relacije. Tada je RS simetrična akko $RS = SR$.

$\boxed{\text{Zadatak:}}$

R je relacija ekvivalencije akko $RR^{\tau} \cup I = R$.

$\boxed{\text{Definicija:}}$ Najmanja relacija koja sadrži relaciju R i ima svojstvo $\mathcal{P}$ naziva se $\mathcal{P}$-zatvorenje od R.

$\boxed{\text{Napomena:}}$

- Refleksivno zatvorenje relacije R je relacija $R \cup I$
- Simetrično zatvorenje relacije R je relacija $R \cup R^\tau$
- Tranzitivno zatvorenje relacije R je relacija $R^+ := \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$
- Refleksivno i tranzitivno zatvorenje relacije R je relacija $R^* := \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n$
- Najmanja relacija ekvivalencije koja sadrži relaciju R je relacija $(R \cup R^\tau)^*$

$\boxed{\text{Zadatak:}}$

(i) $R \subseteq S \Rightarrow \forall n \,.\, R^n \subseteq S^n$

(ii) $R \subseteq S \Rightarrow R^+ \subseteq S^+$

(iii) $R \subseteq S \Rightarrow R^* \subseteq S^*$

$\boxed{\text{Zadatak:}}$

$$(R^*)^* = R^*$$

$\boxed{\text{Zadatak:}}$ (Lema o sendviču)

$$S \subseteq R \subseteq S^* \Rightarrow R^* = S^*$$

$\boxed{\text{Zadatak:}}$

$$(R \cup S)^* = (R^* S^*)^*$$