Matematička teorija računarstva

Predavanja 13

Matko Botinčan

PMF – Matematički odjel

24.01.2007.

PDA

Definicija 1

*Potisni automat (**PDA**) $\mathcal{A}$ je $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$ gdje je:*

- Q — *konačan skup stanja*
- Σ — *alfabet ulaznog niza znakova*
- Γ — *alfabet stoga*
- $\delta\colon Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to \mathscr{P}(Q \times \Gamma^*)$ — *tranzicijska funkcija*
- $q_0 \in Q$ — *početno stanje*
- $Z_0 \in \Gamma$ — *početni simbol na stogu*

Uvjet prihvaćanja — završnim stanjem iz $F \subseteq Q$ ili praznim stogom

Definicija relacije $\vdash$:

$$(q, aw, X\beta) \vdash (p, w, \alpha\beta) \quad \Leftrightarrow \quad (p, \alpha) \in \delta(q, a, X)$$

KSG

Definicija 2

*Kontekstno slobodna gramatika (**KSG**) $\mathcal{G}$ je (Σ, V, S, P) gdje je:*

- Σ — *alfabet terminalnih simbola*
- V — *konačan skup (alfabet) varijabli (neterminalnih simbola)*
- $S \in V$ — *početna varijabla (simbol)*
- $P \subseteq V \times (\Sigma \cup V)^*$ — *konačan skup produkcijskih pravila oblika*

$$A \to \beta \qquad (A \in V, \beta \in (\Sigma \cup V)^*)$$

Definicija relacije $\Rightarrow$:

$$uAw \Rightarrow u\beta w \quad \Leftrightarrow \quad A \to \beta \in P$$

KSG $\subseteq$ PDA

Za danu **KSG** $\mathcal{G} = (\Sigma, V, S, P)$ konstruiramo **PDA** $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$ na slijedeći način:

- $\mathcal{A}_{\mathcal{G}} = (\{q\}, \Sigma, \Sigma \cup V, \delta, q, S)$
- prihvaćanje praznim stogom
- tranzicijska funkcija δ dana je s:
  - $\forall A \in V \ . \ \delta(q, \varepsilon, A) = \{(q, \beta) \mid A \to \beta \in P\}$
  - $\forall a \in \Sigma \ . \ \delta(q, a, a) = \{(q, \varepsilon)\}$

Teorem 1

$$L(\mathcal{G}) = L_E(\mathcal{A}_{\mathcal{G}})$$

KSG $\subseteq$ PDA

Dokaz.

$\boxed{\subseteq}$ Neka $S = \gamma_1 \Rightarrow \gamma_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \gamma_n = w$.
Indukcijom pokazujemo da vrijedi:

$$\text{ako } S \Rightarrow^* \gamma_i, \text{ onda } (q, w, S) \vdash^* (q, y_i, \alpha_i),$$

gdje je $\gamma_i = x_i \alpha_i$ i $w = x_i y_i$.

$\boxed{\supseteq}$ Indukcijom pokazujemo da vrijedi:

$$\text{ako } (q, x, A) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon), \text{ onda } A \Rightarrow^* x.$$

$\square$

PDA $\subseteq$ KSG

Za dani **PDA** $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$ konstruiramo **KSG** $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ na slijedeći način:

- $\mathcal{G}_{\mathcal{A}} = (\Sigma, V, S, P)$
- $V = \{[pXq] \mid \{p, q\} \subseteq Q,\ X \in \Gamma\} \cup \{S\}$
- $P = \{S \to [q_0 Z_0 p] \mid p \in Q\} \cup$
  $\{[qXr_k] \to a[rY_1r_1] \ldots [r_{k-1}Y_kr_k] \mid$
  $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\},\ \{r_1, \ldots, r_k\} \subseteq Q,\ (r, Y_1 \ldots Y_k) \in \delta(q, a, X)\}$

Teorem 2

$$L_E(\mathcal{A}) = L(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$$

PDA $\subseteq$ KSG

Dokaz.

$\boxed{\subseteq}$ Indukcijom pokazujemo da vrijedi:

$$\text{ako } (q, w, X) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon), \text{ onda } [qXp] \Rightarrow^* w.$$

$\boxed{\supseteq}$ Indukcijom pokazujemo da vrijedi:

$$\text{ako } [qXp] \Rightarrow^* w, \text{ onda } (q, w, X) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon).$$

$\square$