Matematička teorija računarstva: Nagradni zadaci 2006/2007

Matko Botinčan

6. travnja 2007.

Napomena: Svaki točno riješeni nagradni zadatak vrijedi 5 bodova. Potencijalna rješenja zadataka šalju se u elektronskom obliku na email adresu `mabotinc@math.hr`. Pri tome, bodovi za pojedini nagradni zadatak dodjeljuju se prvim trima pristiglim točnim rješenjima (netočna rješenja se ne broje). Trenutni status pristiglih točnih rješenja nagradnih zadataka može se vidjeti na web stranici kolegija.

*** 1.** *Neka je* $\varphi\colon \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(A)$ *monotoni operator koji je bijekcija. Dokažite ili opovrgnite da je tada i operator* $\varphi^{-1}\colon \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(A)$ *također monoton?*

*** 2.** *Neka je* $\mathcal{A} = (Q, Q_0, \delta, F)$ **NKA** *nad alfabetom* Σ*. Kažemo da je stanje* $s \in Q$ *dostiživo ukoliko postoji riječ* $x \in \Sigma^*$ *takva da postoji izračunavanje od* $\mathcal{A}$ *na* x *koje počinje u nekom od stanja iz* Q_0*, a završava u stanju* s*.* $\mathcal{A}$ *je dostiživ ako je svako stanje od* $\mathcal{A}$ *dostiživo. Kažemo da je stanje* $s \in Q$ *kodostiživo ukoliko postoji riječ* $x \in \Sigma^*$ *takva da postoji izračunavanje od* $\mathcal{A}$ *na* x *koje počinje u stanju* s*, te sadrži neko od stanja iz* F*.* $\mathcal{A}$ *je kodostiživ ako je svako stanje od* $\mathcal{A}$ *kodostiživo. Kažemo da* $\mathcal{A}$ *ima svojstvo* $\heartsuit$ *ukoliko je* $\mathcal{A}$ *dostiživ i kodostiživ. Dokažite da za svaki regularni jezik* $L \subseteq \Sigma^*$ *postoji automat* $\mathcal{A}$ *sa svojstvom* $\heartsuit$ *koji prepoznaje* L*.*

*** 3.** *Za jezik* $L \subseteq \Sigma^*$ *označimo s* $\mathsf{prefiks}(L)$*,* $\mathsf{sufiks}(L)$ *i* $\mathsf{faktor}(L)$ *jezike koji predstavljaju prefikse svih riječi iz* L*, sufikse svih riječi iz* L*, te faktore svih riječi iz* L*, respektivno (*y *nazivamo faktorom riječi* w *ako postoje riječi* x *i* z *takvi da je* $w = xyz$*). Dokažite da ako je* L *regularan jezik, onda su i* $\mathsf{prefiks}(L)$*,* $\mathsf{sufiks}(L)$*, te* $\mathsf{faktor}(L)$ *također regularni jezici.*

*** 4.** *Dokažite da je jezik* $L \subseteq \Sigma^*$ *regularan ako i samo ako postoji* $n > 0$ *takav da za sve* $w \in \Sigma^*$*,* $|w| \geq n$ *postoje* $x, y, z \in \Sigma^*$ *sa slijedećim svojstvima:*

- $w = xyz$;
- $y \neq \varepsilon$;
- $\forall i \geq 0$ *i* $\forall v \in \Sigma^*$ *vrijedi* $wv \in L \Leftrightarrow xy^i zv \in L$.

*** 5.** *Dokažite ili opovrgnite: svaki jezik sa svojstvom da je svaki njegov podskup kontekstno slobodan je nužno konačan.*

*** 6.** *Nađite gramatiku koja generira jezik* $L = \{a^{k^2} \mid k \geq 0\}$*.*
(Hint: $k^2 = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1)$*).*

*** 7.** *Odredite da li je jezik* $L = \{< \mathcal{G} > \mid \mathcal{G}$ *je* **KSG** *nad* $\{0,1\}$ *t.d.* $1^* \subseteq L(\mathcal{G})\}$ *odlučiv?*