• Seminar za teorijsko računarstvo • Branch-and-cut algoritmi za CVRP

Matko Botinčan

1. lipnja 2004.

1 Sadržaj seminara

- Opis VRP problema
- Matematički modeli CVRP problema
- Poliedarske nejednakosti
- O procedurama za separaciju
- Branching strategije
- Trenutni trendovi

2 Opis VRP problema

VRP (*Vehicle Routing Problem*) svoje ishodište nalazi u problemima distribucije robe zadanim skupom vozila između skladišta i korisnika povezanih mrežom cesta.

Mreža cesta opisuje se grafom čiji lukovi predstavljaju dijelove cesta, a vrhovi rakršća i lokacije korisnika, odnosno skladišta. Svakom luku pridružen je neki oblik cijene: npr. duljina ceste, vrijeme potrebno za prolazak i sl.

Karakteristike korisnika:

- vrh grafa u kojem je lociran
- zahtjevi na količinu robe (*demand*) koju je potrebno dostaviti
- periodi dana (*time windows*) kada je moguće prihvatiti robu
- vremena potrebna za istovarivanje i utovarivanje robe (*unloading* i*loading times*)
- poskup skupa vozila koja ga mogu opslužiti

Karakteristike vozila:

- skladište iz kojeg kreće (*home depot*)
- kapacitet (*capacity*)
- podskup skupa lukova grafa kojima vozilo može prolaziti
- troškovi korištenja (*costs*)

Tipični ciljevi:

- minimizacija ukupnih troškova transporta
- minimizacija broja vozila
- balansiranje ruta (obzirom na vremensko trajanje i opterećenost vozila)

2.1 Klase VRP problema

- CVRP (*Capacitated VRP*)
- DCVRP (*Distance-Constrained VRP*)
- VRPTW (*VRP with Time Windows*)
- VRPB (*VRP with Backhauls*)
- VRPPD (*VRP with Pickup and Delivery*)

2.2 Koliko je težak VRP?

Podaci iz 2002. godine:

- Najveća riješena instanca VRP problema: F-n135-k7
- Najmanja neriješena instanca VRP problema: B-n50-k8
- Najveća riješena instanca TSP problema: usa13509
- Vrijeme potrebno za rješavanje B-n50-k8 kao Multiple TSP problema: manje od 1 s

Većina standardnih pristupa tretira VRP problem na sličan način kao što se tretira TSP (u smislu poliedarskih nejednakosti, branching strategija i sl.).

VRP je u svojoj osnovi zapravo presjek dva NP-teška problema:

- TSP (*Traveling Salesman Problem*)
- BPP (*Bin Packing Problem*)

Postoji mnogo tehnika za tretiranje VRP-a kao *routing* problema, no, jako malo ih je poznato koje tretiraju *packing* aspekt.
(*packing*, a ne *routing* je ono što VRP problem čini teškim).

3 Matematički modeli CVRP problema

3.1 Matematički opis CVRP problema kao problema kombinatorne optimizacije

Neka je zadan potpun (ne)usmjereni graf $G(V, E)$ sa skupom vrhova $V = \{0, \ldots, n\}$, gdje vrhovi $1, \ldots, n$ odgovaraju korisnicima, a vrh 0 odgovara skladištu. Svakom luku $(i, j) \in E$ pridružena je nenegativna cijena c_{ij} koja predstavlja troškove putovanja iz vrha i u vrh j.

- ACVRP (*asymmetric CVRP*) $\leftrightarrow$ matrica cijena $[c_{ij}]$ asimetrična
- SCVRP (*symmetric CVRP*) $\leftrightarrow$ matrica cijena $[c_{ij}]$ simetrična

Svakom korisniku $i \in \{1, \ldots, n\}$ pridružen je nenegativni broj d_i koji predstavlja zahtjev na količinu robe koju mu treba dostaviti (skladište ima fiktivni zahtjev $d_0 = 0$). Za skup $S \subseteq V$ sa $d(S) = \sum_{i \in S} d_i$ označit ćemo ukupan zahtjev skupa S.

Skup od K identičnih vozila, svako kapaciteta C, dostupno je za polazak iz skladišta (pretpostavljamo da je $d_i \leq C$ za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$). Svako vozilo može izvršiti točno jednu rutu.

CVRP problem sastoji se od nalaženja K jednostavnih ciklusa u grafu minimalne cijene takvih da vrijedi:

1. svaki ciklus obilazi vrh 0 (skladište),
2. svaki vrh koji predstavlja korisnika je obiđen točno jednim ciklusom,
3. zbroj zahtjeva vrhova na pojedinom ciklusu ne premašuje zadani kapacitet C.

Dopustiva rješenja za CVRP (koja ćemo nazivati K-rutama) se, dakle, sastoje od:

- particije $\{R_1, \ldots, R_K\}$ skupa vrhova $V \setminus \{0\}$ t.d. $\sum_{j \in R_i} d_j \leq C$, za sve $i \in \{1, \ldots, K\}$.
- permutacije skupa $R_i \cup \{0\}$ koja specificira redoslijed obilaženja korisnika na i-toj ruti.

Pretpostavljamo da broj vozila K nije manji od nekog $K_{\min}$, gdje $K_{\min}$ predstavlja minimalni broj vozila potreban za obilaženje svih korisnika.

Vrijednost od $K_{\min}$ moguće je odrediti rješavanjem odgovarajućeg *Bin Packing* problema (BPP) u kojem je potrebno odrediti minimalni broj posuda kapaciteta C potrebnih za pakiranje n predmeta od kojih je svaki težine d_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Za skup $S \subseteq V \setminus \{0\}$ označimo s $r(S)$ minimalni broj vozila potrebnih za obilaženje svih korisnika u S. tj. optimalno rješenje BPP problema asociranog skupu predmeta S (uočimo $r(V \setminus \{0\}) = K_{\min}$). Često se $r(S)$ zamjenjuje trivijalnom donjom ogradom $\lceil d(S)/C \rceil$.

Specijalni slučajevi CVRP-a:

- TSP: $C \geq d(V)$ i $K = 1$
- Multiple TSP: $C \geq d(V)$
- BPP: $c_{ij} = 0$

3.2 IP formulacija CVRP problema

Dat ćemo pregled tzv. *vehicle flow* modela.

Definicija 3.1 (ACVRP, dvoindeksna formulacija)

$$
(VRP1)\begin{cases}
\min & \displaystyle\sum_{i \in V} \sum_{j \in V} c_{ij} x_{ij} & \\
s.t. & \displaystyle\sum_{i \in V} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in V \setminus \{0\} & (\triangle_1) \\
& \displaystyle\sum_{j \in V} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in V \setminus \{0\} & (\triangle_2) \\
& \displaystyle\sum_{i \in V} x_{i0} = K & (\Box_1) \\
& \displaystyle\sum_{j \in V} x_{0j} = K & (\Box_2) \\
& \displaystyle\sum_{i \notin S} \sum_{j \in S} x_{ij} \geq r(S), \quad \forall S \subseteq V \setminus \{0\}, \ S \neq \emptyset & (\clubsuit) \\
& x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j \in V &
\end{cases}
$$

Jednakosti ($\triangle_1$) i ($\triangle_2$) predstavljaju ograničenja na ulazne i izlazne stupnjeve vrhova u grafu (tzv. *indegree* i *outdegree constraints*). Analogno, jednakosti ($\Box_1$) i ($\Box_2$) daju uvjete na stupanj vrha 0 (skladište).

Nejednakosti ($\clubsuit$) nazivaju se *capacity-cut constraints* (CCC) i one uvjetuju povezanost rješenja i ispunjenje zahtjeva na kapacitet vozila – svaki rez $(V \setminus S, S)$ definiran skupom korisnika S mora sadržati barem $r(S)$ lukova (pri čemu se $r(S)$ često zamjenjuje s nekom donjom ogradom koja je lakša za izračunati).

Zbog ograničenja na ulazne i izlazne stupnjeva vrhova vrijedi:

$$\sum_{i \notin S} \sum_{j \in S} x_{ij} = \sum_{i \in S} \sum_{j \notin S} x_{ij} \quad \forall S \subseteq V \setminus \{0\}\,,\ S \neq \emptyset,$$

pa nejednakosti ($\clubsuit$) možemo zapisati i ovako:

$$\sum_{i \notin S} \sum_{j \in S} x_{ij} \geq r(V \setminus S), \quad \forall S \subset V,\ 0 \in S.$$

Često se umjesto CCC ograničenja ($\clubsuit$) koriste tzv. *generalized subtour elimination constraints* (GSEC) nejednakosti:

$$\sum_{i \notin S} \sum_{j \in S} x_{ij} \leq |S| - r(S) \quad \forall S \subseteq V \setminus \{0\}\,,\ S \neq \emptyset, \qquad (\widetilde{\clubsuit})$$

koje uvjetuju da barem $r(S)$ lukova izlazi iz svakog skupa korisnika S.

Uočimo kako kardinalitet obje familije nejednakosti ($\clubsuit$) i ($\widetilde{\clubsuit}$) raste eksponencijalno s n, pa je praktički nemoguće direktno riješiti LP relaksaciju problema.

ACVRP model može se adaptirati za simetrični VRP problem na slijedeći način:

Definicija 3.2 (SCVRP, dvoindeksna formulacija)

$$(VRP2)\left\{\begin{array}{ll}
\min & \displaystyle\sum_{i \in V \setminus \{n\}} \sum_{j > i} c_{ij} x_{ij} \\
s.t. & \displaystyle\sum_{h < i} x_{hi} + \sum_{j > i} x_{ij} = 2, \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \\
 & \displaystyle\sum_{j \in V \setminus \{0\}} x_{0j} = 2K \\
 & \displaystyle\sum_{i \in S} \sum_{h < i, h \notin S} x_{hi} + \sum_{i \in S} \sum_{j > i, j \notin S} x_{ij} \geq 2r(S), \quad \forall S \subseteq V \setminus \{0\}\,,\ S \neq \emptyset \\
 & x_{ij} \in \{0,1\}\,, \quad \forall i,j \in V \setminus \{0\}\,,\ i < j \\
 & x_{0j} \in \{0,1,2\}\,, \quad \forall j \in V \setminus \{0\}
\end{array}\right.$$

Simetrični VRP problem češće se zadaje koristeći varijable indeksirane jednostrukim indeksom $e \in E$:

Definicija 3.3 (SCVRP, jednoindeksna formulacija)

$$(VRP3)\begin{cases} \min & \displaystyle\sum_{e\in E} c_e x_e \\ s.t. & \displaystyle\sum_{e\in\delta(i)} x_e = 2, \quad \forall i \in V\setminus\{0\} \\ & \displaystyle\sum_{e\in\delta(0)} x_e = 2K \\ & \displaystyle\sum_{e\in\delta(S)} x_e \geq 2r(S), \quad \forall S\subseteq V\setminus\{0\}\,,\ S\neq\emptyset \\ & x_e\in\{0,1\}\,, \quad \forall e\notin\delta(0) \\ & x_e\in\{0,1,2\}\,, \quad \forall e\in\delta(0), \end{cases}$$

gdje $\delta(S)$ predstavlja skup svih bridova $e \in E$ koji imaju točno jedan kraj u S.

Analogno kao i u slučaju za ACVRP, umjesto CCC nejednakosti mogu se upotrijebiti GSEC nejednakosti:

$$\sum_{e\in S} x_e \leq |S| - r(S) \quad \forall S\subseteq V\setminus\{0\}\,,\ S\neq\emptyset.$$

4 Poliedarske nejednakosti

Branch-and-cut algoritmi vrlo su uspješna metoda za egzaktno rješavanje problema kombinatorne optimizacije, no, ipak performanse mogu biti razočaravajuće ukoliko su neke od komponenata preslabe:

1. nemamo dobar algoritam za separaciju
2. broj iteracija u *cutting-planes* fazi je prevelik
3. linearni program postaje nerješiv zbog svoje veličine
4. stablo generirano procedurom grananja postaje preveliko

Centralni problem branch-and-cut algoritama predstavlja 4. problem, kojeg je moguće ublažiti jedino ojačavanjem linearne relaksacije IP-a, tj. uvođenjem "dobrih" *facet-defining* nejednakosti. Stoga ćemo proučiti razne klase poliedarskih nejednakosti za VRP koje su u većoj ili manjoj mjeri *facet-defining*.

Uvedimo slijedeće oznake:

- za $F \subseteq E$ i vektor $x \in \mathbb{R}$ označimo $x(F) = \sum_{e\in F} x_e$,
- za $S \subset V$, $T \subset V$, $S \cap T = \emptyset$ označimo s $(S : T)$ skup svih bridova s jednim krajem u S a drugim krajem u T,

- za $S \subset V$, $T \subset V$, $S \cap T = \emptyset$ označimo s $\delta(S) = (S : V \setminus S)$,
- za $S \subset V$, $T \subset V$, $S \cap T = \emptyset$ označimo s $E(S) = (S : S)$.

Definicija 4.1 (IP formulacija SCVRP problema)

$$
IP_{\text{CVRP}} \begin{cases} \min & \displaystyle\sum_{e \in E} c_e x_e \\ s.t. & x(\delta(i)) = 2, \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \\ & x(\delta(0)) = 2K \\ & x(\delta(S)) \geq 2 \left\lceil \dfrac{d(S)}{C} \right\rceil, \quad \forall S \subseteq V \setminus \{0\}, \; S \neq \emptyset \\ & 0 \leq x_e \leq 1, \quad \forall e \in E \setminus \delta(0) \\ & 0 \leq x_e \leq 2, \quad \forall e \in \delta(0) \\ & x_e \in \mathbb{Z}, \quad \forall e \in E. \end{cases}
$$

4.1 Capacity Constraints (CC)

CC nejednakosti za CVRP politop igraju sličnu ulogu kao tzv. *subtour elimination constraints* nejednakosti kod TSP politopa – ima ih eksponencijalno mnogo i nužne su za definiciju IP_{CVRP} problema. No, ipak, nisu sve CC nejednakosti *facet-defining*.

Sve CC nejednakosti imaju jednake lijeve strane, a razlikuju se jedino po desnoj strani:
veća desna strana $\rightarrow$ jača nejednakost $\rightarrow$ teži separacijski problem.

Najslabije CC nejednakosti su tzv. *fractional capacity* nejednakosti:

$$x(\delta(S)) \geq 2\frac{d(S)}{C}, \quad \forall S \subseteq V \setminus \{0\}, \; S \neq \emptyset$$

Separacijski problem za ove nejednakosti je rješiv u polinomnom vremenu (redukcijom na *network flow* problem), no, one su rijetko *facet-defining*. (IP formulacija VRP-a i s takvim nejednakostima ostaje valjana).

U definiciji problema IP_{CVRP} upotrebljene su tzv. *rounded capacity* nejednakosti:

$$x(\delta(S)) \geq 2\left\lceil \frac{d(S)}{C} \right\rceil, \quad \forall S \subseteq V \setminus \{0\}, \; S \neq \emptyset$$

Asocirani separacijski problem je znatno teži, makar je i dalje prihvatljiv jer postoji polinomni algoritam za rješavanje problema separacije s preciznošću do na zadani ε. I u ovom slučaju nejednakosti nisu nužno *facet-defining*.

Još jača donja ograda na lijevu stranu CC nejednakosti dobiva se upotrebom optimalnog rješenja $r(S)$ BPP problema asociranog skupu S (*weak capacity* nejednakosti):

$$x(\delta(S)) \geq 2r(S), \quad \forall S \subseteq V \setminus \{0\}\,,\ S \neq \emptyset$$

Budući je BPP NP-težak, separacijski problem za ove nejednakosti nije rješiv u polinomnom vremenu.

Očito, u slučaju kada je $\left\lceil \frac{d(S)}{C} \right\rceil \neq r(S)$ pripadna *rounded capacity* nejednakost nije *facet-defining*. No, niti *weak capacity* nejednakosti općenito nisu *facet-defining*.

Označimo s $\mathcal{P}$ skup svih dopustivih K-particija od $V \setminus \{0\}$. Za neprazni $S \subset V_0$ i K-particiju $P = \{S_1, \ldots, S_K\}$ $(d(S_i) \leq C,\ i = 1, \ldots, K)$ definiramo:

$$\beta(P, S) = |\,\{i \mid S_i \cap S \neq \emptyset\}\,|$$

Funkcija $R\colon 2^{V \setminus \{0\}} \to \mathbb{Z}_+$ definirana s

$$R(S) = \min_{P \in \mathcal{P}} \beta(P, S)$$

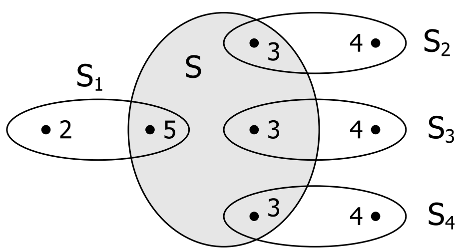
očito daje minimalni broj vozila potreban za opsluživanje zahtjeva korisnika iz skupa S unutar dopustive K-particije.

Na ovaj način dobivamo *capacity* nejednakosti koje su po definiciji *facet-defining*, ali s najtežim problemom separacije:

$$x(\delta(S)) \geq 2R(S), \quad \forall S \subseteq V \setminus \{0\}\,,\ S \neq \emptyset$$

Primjer:
Pogledajmo slijedeći primjer u kojem je $K = 4$, $C = 7$, $d = \{2, 5, 3, 3, 3, 4, 4, 4\}$ i u kojem vrijede stroge nejednakosti između pojedinih desnih strana CC nejednakosti:

$$R(S) = 4 > r(S) = 3 > \left\lceil \frac{d(S)}{C} \right\rceil = 2$$



Slika 1: Primjer za CC nejednakosti

4.2 Generalized Capacity Constraints (GCC)

Neka je dan skup $\mathcal{S} = S_1, \ldots, S_t$ $t > 1$ disjunktnih podskupova od $V \setminus \{0\}$. Zbrajanjem t capacity nejednakosti dobivamo:

$$\sum_{i=1}^{t} x(\delta(S_i)) \geq 2 \sum_{i=1}^{t} R(S_i).$$

Može se desiti da niti jedna dopustiva K-particija na kojoj $R(S_j) = \min_{P \in \mathcal{P}} \beta(P, S_j)$ (za neki j) poprima minimum nije ona na kojoj se poprimaju minimumi za preostalih $t-1$ skupova.

Najveća vrijednost desne strane dana je s:

$$2R(\mathcal{S}) = 2 \min \left\{ \sum_{i=1}^{t} \beta(P, S_i) \mid P \in \mathcal{P} \right\}$$

Rezultantna nejednakost:

$$\sum_{i=1}^{t} x(\delta(S_i)) \geq 2R(\mathcal{S})$$

zove se *generalized capacity* nejednakost.

Budući je pripadni problem separacije s funkcijom $R(\cdot)$ izrazito težak, poglednajmo oslabljenu varijantu GCC nejednakosti.

Neka je $H \subseteq V \setminus \{0\}$ t.d. sadrži sve podskupove iz $\mathcal{S}$, te pretpostavimo da $d(S_i) \leq C$ vrijedi za sve $i \in \{1, \ldots, t\}$. Definirajmo $r(H \mid S_1, \ldots, S_t)$ kao rješenje slijedećeg BPP problema:

- posude imaju kapacitet C,
- predmeti su veličine:
  - $d(u)$ za svaki vrh $u \in H \setminus \bigcup_{i=1}^{t} S_i$, te
  - $d(S)$ za svaki $S \in \mathcal{S}$.

Za $H = V \setminus \{0\}$ definiramo *weak generalized capacity* nejednakost (WGCC):

$$x(\delta(V \setminus \{0\})) + \sum_{i=1}^{t} x(\delta(S_i)) \geq 2t + 2r(V \setminus \{0\} \mid S_1, \ldots, S_t),$$

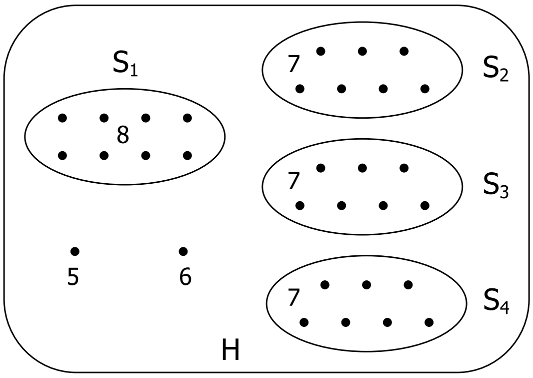
odnosno, budući vrijedi $x(\delta(V \setminus \{0\})) = 2K$ ekvivalentno:

$$\sum_{i=1}^{t} x(\delta(S_i)) \geq 2t + 2(r(V \setminus \{0\} \mid S_1, \ldots, S_t) - K).$$

4.3 Framed Capacity Constraints (FCC)

Neka je $H \subseteq V \setminus \{0\}$ koji sadrži sve podskupove S_i, $i \in \{1, \ldots, t\}$. Stavljanjem H umjesto $V \setminus \{0\}$ u WGCC nejednakosti dobivamo tzv. *framed capacity* nejednakosti:

$$x(\delta(H)) + \sum_{i=1}^{t} x(\delta(S_i)) \geq 2t + 2r(H \mid S_1, \ldots, S_t).$$



Slika 2: Primjer za *framed capacity* nejednakosti

Primjer:
Pogledajmo primjer u kojem je $t = 4$, skupovi S_1, S_2, S_3 i S_4 imaju po 8, 7, 7 i 7 klijenata jediničnih zahtjeva, skup $H \setminus \bigcup_{i=1}^{4} S_i$ ima samo dva klijenta s zahtjevima 5 i 6, te je $C = 10$. Vrijedi da je:

$$r(H \mid S_1, S_2, S_3, S_4) = 6,$$

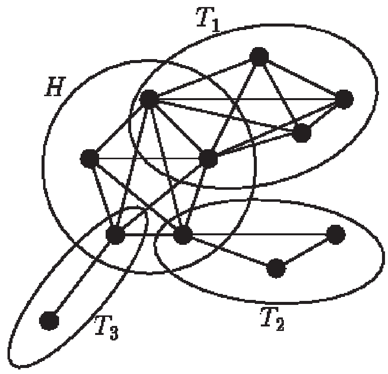
pa stoga imamo nejednakost:

$$x(\delta(H)) + \sum_{i=1}^{4} x(\delta(S_i)) \geq 20.$$

4.4 Nejednakosti iz TSP problema

Nejednakosti iz prethodnih sekcija bavile su se samo *packing* dijelom VRP problema, dok se nejednakosti koje dolaze iz TSP problema bave *routing* dijelom VRP-a.

Za primjer pogledajmo klasu tzv. *comb* nejednakosti. *Comb* je definiran skupom H (koji se naziva *handle*) i neparnim brojem skupova $T_1, \ldots, T_t$ (koji se nazivaju



Slika 3: *Comb*

teeth) koji zadovoljavaju slijedeće uvjete:

$$\begin{gathered}H, T_1, \ldots, T_t \subseteq V, \\ T_j \setminus H \neq \emptyset \quad \forall 1 \leq j \leq t, \\ T_j \cap H \neq \emptyset \quad \forall 1 \leq j \leq t, \\ T_i \cap T_j = \emptyset \quad \forall 1 \leq i < j \leq t, \\ t \geq 3, \text{ neparan.}\end{gathered}$$

Comb nejednakost tada je dana s:

$$x(\delta(H)) + \sum_{i=1}^{t} x(\delta(T_i)) \geq 3t + 1,$$

ili ekvivalentno:

$$x(\delta(H)) \geq (t+1) - \sum_{i=1}^{t} (x(\delta(T_i)) - 2).$$

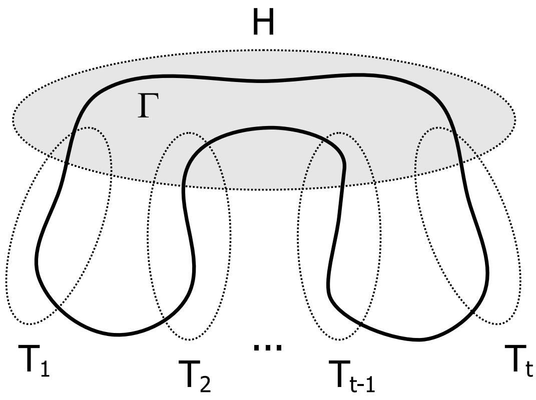
Ideja dokaza za *comb* nejednakosti:
Neka je Γ Hamiltonov ciklus, zatvorena šetnja ili K-ruta takva da vrijedi $|\Gamma \cap \delta(T_i)| = 2$, za sve $i \in \{1, \ldots, t\}$. Budući mora postojati barem po jedan brid u Γ iz $(T_i \setminus H : T_i \cap H)$ (za sve T_i) slijedi da vrijedi $|\Gamma \cap \delta(H)| \geq t$. Jer je t neparan, a Γ nužno siječe $\delta(H)$ u parnom broju bridova, mora vrijediti:

$$|\Gamma \cap \delta(H)| \geq t + 1.$$

Odavde slijedi:

$$x(\delta(H)) + \sum_{i=1}^{t} x(\delta(T_i)) = x(\delta(H)) + 2t \geq t + 1 + 2t = 3t + 1.$$

Može se pokazati da u slučaju kada je $|\Gamma \cap \delta(T_i)| = 2 + 2s_i$ ($s_i \geq 0$, $i \in \{1, \ldots, t\}$) minimalni broj bridova u $\Gamma \cap \delta(H)$ nije reduciran za više od $2\sum_{i=1}^{t} s_i$, pa nejednakost i dalje vrijedi.



Slika 4: Slika uz dokaz *comb* nejednakosti

□

Comb se može definirati i općenitije *handle*-om H i neparnim brojem *teeth*-ova $T_1, \ldots, T_r, T_{r+1}, \ldots, T_t$ koji zadovoljavaju:

$$\begin{gathered} H, T_1, \ldots, T_t \subseteq V, \\ T_j \setminus H \neq \emptyset \quad \forall 1 \leq j \leq t, \\ T_j \cap H \neq \emptyset \quad \forall 1 \leq j \leq t, \\ T_i \cap T_j = \emptyset \quad \forall 1 \leq i < j \leq r, \\ T_i \cap T_j = \{0\} \quad \forall r+1 \leq i < j \leq t, \\ t \geq 3, \text{ neparan.} \end{gathered}$$

Odgovarajuća *comb* nejednakost glasi:

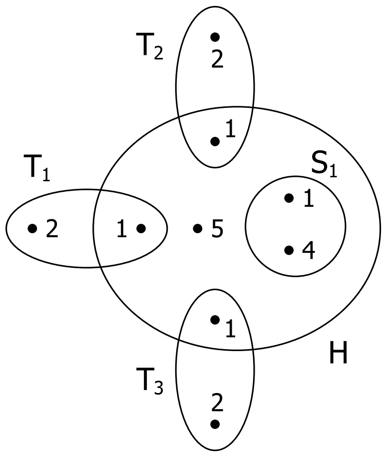
$$x(\delta(H)) + \sum_{i=1}^{t} x(\delta(T_i)) \geq t + 1 + 2r + 2K(t - r).$$

4.5 Nejednakosti koje kombiniraju TSP i BPP

Cilj je ovakvim nejednakostima kombinirati istovremeno *routing* i *packing* aspekt VRP problema. Pokazat ćemo tzv. *path-bin* nejednakosti koje su generalizacija *framed capacity* nejednakosti i *comb* nejednakosti.

Nosač za *path-bin* definiran je skupom H (*handle*), skupovima $T_1, \ldots, T_t$ (*teeth*) i skupovima $S_1, \ldots, S_s$ (*spots*). Radi pojednostavljenja oznaka skupove S_i ponekad ćemo označavati T_{t+i}. Skupovi H, T_i i S_i zadovoljavaju slijedeće nejednakosti:

$$
\begin{gathered}
H, T_1, \ldots, T_{t+s} \subseteq V \setminus \{0\}, \\
d(T_j) \leq C \quad \forall 1 \leq j \leq t+s, \\
S_j \subset H \quad \forall 1 \leq j \leq s \\
T_j \cap H \neq \emptyset \quad \forall 1 \leq j \leq t, \\
T_j \setminus H \neq \emptyset \quad \forall 1 \leq j \leq t, \\
T_i \cap T_j = \emptyset \quad \forall 1 \leq i < j \leq t+s, \\
t+s \geq 1.
\end{gathered}
$$



Slika 5: Primjer *path-bin* nosača

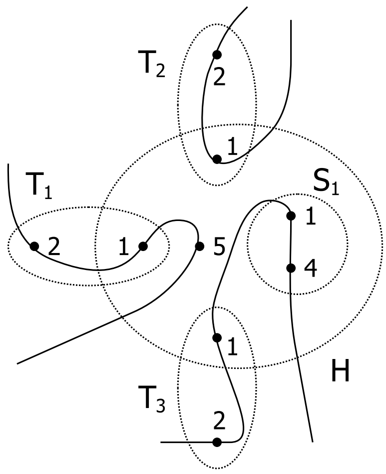
Definiramo *path-bin* potproblem kao BPP problem sa slijedećim dodatnim uvjetima. Označimo s I skup predmeta:

- Svaki skup T_j, $1 \leq j \leq t$ i S_j, $1 \leq j \leq s$ definira po jedan predmet veličine $d(T_j)$, odnosno $d(S_j)$.
- Svaki vrh $v \in H \setminus (\bigcup_{j=1}^{t+s} T_j)$ definira po jedan predmet veličine d_v.

Veličina posude neka je kapacitet vozila C.

Tada s $r'(H \mid T_1, \ldots, T_{t+s})$ označavamo minimalni broj posuda potrebnih za pakiranje skupa predmeta I s dodatnim ograničenjem da posuda smije sadržavati predmete kojima su asocirani najviše dva skupa T_j.

Kako bi se povezao *path-bin* potproblem s rješenjima VRP problema definiramo H-put od K-rute kao presjek jedne od ruta s $E(H)$. Svrha *path-bin* potproblema je izračunati minimalni broj H-puteva na skupu svih K-ruta VRP-a pod uvjetom da zahtjevi *tooth*-a ili *spot*-a moraju biti opsluženi samo jednim vozilom (dakle, iz *tooth*-a ili *spot*-a izlaze samo dva brida koja pripadaju K-ruti).



Slika 6: Primjer H-puteva

Moguće je dokazati da za svaki *path-bin* nosač $(H, T_1, \ldots, T_t, S_1, \ldots, S_s)$ vrijede tzv. *path-bin* nejednakosti:

$$x(\delta(H)) \geq 2r'(H \mid T_1, \ldots, T_{t+s}) - \sum_{j=1}^{t+s}(x(\delta(T_j)) - 2)$$

4.6 Ostale nejednakosti

- *Multistar* nejednakosti
- *Hypotour* nejednakosti
- *Odd-hole* nejednakosti
- *Clique tree* nejednakosti

5 O procedurama za separaciju

Dobri separacijski algoritmi predstavljaju ključni element da bi branch-and-cut algoritam mogao kvalitetno funkcionirati. Nažalost, većina separacijskih problema za VRP su NP-teški, pa uglavnom nije moguće provesti egzaktnu separaciju, nego se onda pribjegava upotrebi (često vrlo delikatnih) heurističkih algoritama.

Poznati su egzaktni polinomni algoritmi za separaciju slijedećih nejednakosti:

- *fractional capacity* nejednakosti,
- *rounded capacity* nejednakosti,
- *multistar capacity* nejednakosti.

U literaturi je moguće pronaći opisane heurističke algoritme za separaciju narednih nejednakosti:

- *rounded capacity* nejednakosti,
- *weak generalized capacity* nejednakosti,
- *framed capacity* nejednakosti,
- *hypotour* nejednakosti,
- *comb* nejednakosti.

6 Branching strategije

6.1 Branching obzirom na bridove

Odabere se brid e^* za kojeg je korespodentna varijabla ($\overline{x}_{e^*}$) u trenutnom optimalnom rješenju LP relaksacije problema necjelobrojna, te se skup rješenja razdvoji na dva dijela u kojima je:

- $x_{e^*} = 1$ (brid e^* je upotrijebljen)
- $x_{e^*} = 0$ (brid e^* nije upotrijebljen)

Osnovni problem jest kako odabrati varijablu obzirom na koju će se izvršiti grananje. Uočimo kako je problem biranja varijable asimetričan:

- Stavljanje varijable na vrijednost 1 odgovara biranju jednog od $n + K$ bridova K-rute.
- Stavljanje varijable na vrijednost 0 odgovara izbacivanju jednog od $\mathcal{O}(n^2)$ bridova iz K-rute.

Praksa pokazuje da je dobro odabrati skup od nekoliko potencijalnih kandidata obzirom na koje bi se moglo izvršiti grananje, te se onda najbolji među njima odredi LP testiranjem – npr. uzme se 10 varijabli s vrijednostima između 0.45 i 0.65, te odabere ona za koju rješenje pripadnog linearnog programa ima najmanju vrijednost.

6.2 Branching obzirom na nejednakosti

Neka je S skup vrhova za kojeg je $\overline{x}(\delta(S)) \approx 2t+1$. Tada možemo dekomponirati problem u dva potproblema:

- onaj u kojem vrijedi $x(\delta(S)) \leq 2t$
- onaj u kojem vrijedi $x(\delta(S)) \geq 2t + 2$

Pokazuje se kako je najbolje birati skup S za kojeg je $\overline{x}(\delta(S)) \approx 3$ koji onda implicira grananje obzirom na $x(\delta(S)) = 2$ i $x(\delta(S)) \geq 4$ (uočimo kako opet imamo asimetričnost).

Eksperimentalno utvrđena pravila po kojima se bira skup S:

- $2.75 \leq x(\delta(S)) \leq 3.0$ i $d(S) > C/2$,
- S je "daleko" od skladišta,
- $|S|$ je relativno malen,
- S je sadržan ili barem siječe neki prethodno odabran branching skup.

7 Trenutni trendovi

- Bolje iskorištavanje tzv. *flow-based* i *node-routing* formulacija
- Branch-cut-and-price algoritmi (kombinacija branch-and-cut algoritama s Lagrangeovim i/ili Dantzig-Wolfe relaksacijama)
- Primjena *dynamic decomposition* metoda
- Razvoj dobrih heuristika za poznate klase NP-teških nejednakosti
- Implementacija inteligentnih branching strategija

Literatura

[1] K. Aardal, C. van Hoesel. Polyhedral Techniques in Combinatorial Optimization I: Theory, Statistica Neerlandica 50 (1996), 3.

[2] K. Aardal, C. van Hoesel. Polyhedral Techniques in Combinatorial Optimization II: Applications and Computations, Statistica Neerlandica 50 (1996), 3.

[3] U. Blasum and W. Hochstattler, Application of the Branch and Cut Method to the Vehicle Routing Problem, Zentrum fur Angewandte Informatik Koln Technical Report zpr2000-386 (2000).

[4] R. Fukasawa, M. Poggi de Aragao, M. Reis, and E. Uchoa, Robust Branch-and-Cut-and-Price for the Vehicle Routing Problem, Relatorios de Pesquisa em Engenharia de Producao RPEP Vol. 3 No. 8 (2003).

[5] M. Jünger, G. Reinelt, and S. Thienel, Practical Problem Solving with Cutting Plane Algorithms in Combinatorial Optimization, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, American Mathematical Society (1995), 111.

[6] J. Lysgaard, A.N. Letchford, and R.W. Eglese, A New Branch-and-cut Algorithm for Capacitated Vehicle Routing Problems, submitted to Mathematical Programming (2003).

[7] J. E. Mitchell: Branch-and-Cut Algorithms for Combinatorial Optimization Problems. Handbook of Applied Optimization, Oxford University Press, 2002.

[8] C. H. Papadimitriou, K. Steiglitz. Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity. Prentice Hall, 1982.

[9] T. K. Ralphs, Parallel Branch and Cut for Vehicle Routing, Parallel Computing 29 (2003), 607.

[10] T. K. Ralphs, L. Kopman, W.R. Pulleyblank, and L.E. Trotter Jr., On the Capacitated Vehicle Routing Problem, Mathematical Programming Series B 94 (2003), 343.

[11] A. Schrijver, Theory of Linear and Integer Programming, John Wiley & Sons (1986).

[12] P. Toth, D. Vigo. The Vehicle Routing Problem. SIAM monographs on discrete mathematics and applications, 2002.