

Metode dokazivanja

Luka Mikec (www.math.hr/~lmikec, lmikec@math.hr)

16. veljače 2019.

Zapisom $X, Y \vdash Z$ bilježi se tvrdnja “postoji izvod formule Z iz premisa X i Y ”. Primjerice, tvrdnja $P, Q \vdash S \rightarrow (P \wedge Q)$ je istinita jer postoji (npr.) sljedeći izvod formule $S \rightarrow (P \wedge Q)$ iz formula P i Q :

1	P	pretp.
2	Q	pretp.
3	S	pretp.
4	$P \wedge Q$	\wedge u, 1, 2
5	$S \rightarrow (P \wedge Q)$	\rightarrow u, 3-4

Zapisom $\vdash X$ bilježi se tvrdnja “postoji dokaz formule X ”. Primjerice, tvrdnja $\vdash P \rightarrow P$ je istinita jer postoji sljedeći dokaz formule $P \rightarrow P$:

1	P	pretp.
2	P	op., 1
3	$P \rightarrow P$	\rightarrow u, 1-2

Zadaci

Izradite dedukcije koje demonstriraju sljedeće tvrdnje:

- $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$ (1)
- $A \rightarrow B, B \rightarrow (C \rightarrow G) \vdash A \rightarrow (C \rightarrow G)$ (2)
- $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow (A \rightarrow C)$ (3)
- $\vdash A \rightarrow (A \rightarrow (C \rightarrow C))$ (4)
- $A \wedge B \vdash (A \vee D) \wedge (\neg \neg D \vee A)$ (5)
- $A \wedge (B \wedge C) \vdash D \vee ((A \wedge B) \wedge C)$ (6)
- $(A \wedge B) \leftrightarrow (C \rightarrow (C \vee D)) \vdash B$ (7)
- $\vdash ((A \wedge B) \rightarrow C) \leftrightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$ (8)
- $A \vee B, B \rightarrow (C \rightarrow D), (C \rightarrow D) \leftrightarrow A \vdash (E \wedge C) \rightarrow D$ (9)
- $A \wedge ((B \vee C) \vee (A \rightarrow D)) \vdash B \vee (C \vee D)$ (10)
- $\neg E \wedge (A \vee B), A \rightarrow ((C \rightarrow C) \rightarrow B), B \leftrightarrow (\neg E \rightarrow F) \vdash F$ (11)
- $(A \rightarrow C) \vee ((B \rightarrow (B \vee \neg B)) \rightarrow (B \vee B)) \vdash A \rightarrow (B \vee C)$ (12)
- $A \vee \neg B \vdash \neg(\neg A \wedge B)$ (13)
- $\neg A \wedge B \vdash \neg(A \vee \neg B)$ (14)
- $\vdash \neg A \vee \neg \neg A$ (15)
- $\neg(\neg A \vee \neg B) \vdash A \wedge B$ (16)
- $\neg(\neg A \wedge \neg B) \vdash A \vee B$ (17)
- $A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C) \vdash (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$ (18)
- $\vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$ (19)

Pravila prirodne dedukcije (samo iskazna logika)

- Dedukcija može biti izvod ili dokaz. Izvod počinje jednom ili više (glavnih) premisa odvojenih od ostatka izvoda vodoravnom crtom. Dokaz nema (glavnih) premisa, što znači da uvijek započinje podizvodom.
- Opravdanja se sastoje od tri podatka: simbol veznika, slovo u ili i (za uvođenje/isključenje), te jedan ili više brojeva ili brojevnih raspona. Te tri informacije mogu biti odijeljene razmakom, zarezom, kosom crtom ili nekako drugačije. Poredak te tri informacije proizvoljan je (to ne znači da je poredak brojeva proizvoljan). Iznimno, reiteracija (opetovanje) ne sadrži slovo u ili i.
- Kod nekih je pravila poredak premisa iz kojih slijede proizvoljan, što je signalizirano **zvjezdicom**. Kod takvih se pravila iznimno dopušta i proizvoljan poredak u zapisu brojeva u opravdanju. Primjerice, kod uvođenja konjunkcije, redak rednog broja k mogao se pojaviti prije retka rednog broja j , a u opravdanju je u oba slučaja moglo pisati $\wedge u, j, k$ ili $\wedge u, k, j$. U sva četiri slučaja, pravilo zovemo $\wedge u$.
- Tri točkice signaliziraju da su na njihovu mjestu možda još neki redci osim upisanih.

Uvođenje konjunkcije. *

j	A	
	⋮	
k	B	
	⋮	
	A ∧ B	∧u, j, k

Uvođenje disjunkcije.

j	A		j	B	
	⋮			⋮	
	A ∨ B	∨u, j		A ∨ B	∨u, j

Uvođenje kondicionala.

j	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">A</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">⋮</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">B</td></tr> </table>	A	⋮	B	pretp.
A					
⋮					
B					
k	A → B	→u, j-k			

Uvođenje bikondicionala.

j	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">A</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">⋮</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">B</td></tr> </table>	A	⋮	B	pretp.
A					
⋮					
B					
k	B	pretp.			
m	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">⋮</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">A</td></tr> </table>	⋮	A	pretp.	
⋮					
A					
n	A ↔ B	↔u, j-k, m-n			

Uvođenje kontradikcije. *

j	A	
	⋮	
k	¬A	
	⋮	
	⊥	⊥u, j, k

Uvođenje negacije.

j	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">A</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">⋮</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">⊥</td></tr> </table>	A	⋮	⊥	pretp.
A					
⋮					
⊥					
k	¬A	¬u, j-k			

Isključenje konjunkcije.

j	A ∧ B		j	A ∧ B	
	⋮			⋮	
	A	∧i, j		B	∧i, j

Isključenje disjunkcije.

e	A ∨ B				
	⋮				
j	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">A</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">⋮</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">C</td></tr> </table>	A	⋮	C	pretp.
A					
⋮					
C					
k	C				
m	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">B</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">⋮</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">C</td></tr> </table>	B	⋮	C	pretp.
B					
⋮					
C					
n	C	∨i, e, j-k, m-n			

Isključenje kondicionala. *

j	A → B	
	⋮	
k	A	
	⋮	
	B	→i, j, k

Isključenje bikondicionala. *

j	A ↔ B		j	A ↔ B	
	⋮			⋮	
k	A		k	B	
	⋮			⋮	
	B	↔i, j, k		A	↔i, j, k

Isključenje kontradikcije.

j	⊥	
	⋮	
	A	⊥i, j

Isključenje negacije.

j	¬¬A	
	⋮	
	A	¬i, j

Reiteracija (opetovanje).

j	A	
	⋮	
	A	re., j (ili op., j)