NIKOMAHOV TEOREM

JELENA BEKAVAC KRČADINAC[1] I VEDRAN KRČADINAC[2]

[1] *Jelena Bekavac Krčadinac, OŠ Čučerje, Zagreb*

[2] *Vedran Krčadinac, PMF-Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu*

Ljubitelje numerologije razveselit će da je redni broj ove kalendarske godine jednak kvadratu zbroja prvih devet prirodnih brojeva. Štoviše, jednak je i zbroju njihovih kubova:

$$\begin{aligned}2025 &= (1+2+3+4+5+6+7+8+9)^2\\ &= 1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3+9^3.\end{aligned}$$

Jednakost je specijalni slučaj identiteta poznatog kao Nikomahov teorem:

Teorem 1. $(1+2+3+\ldots+n)^2 = 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Teorem je nazvan po starogrčkom matematičaru i filozofu Nikomahu iz Gerasa (oko 60.–120. godine) [6]. Nikomah je u djelu *Uvod u aritmetiku* primijetio da, ako napišemo redom neparne prirodne brojeve, prvi broj je 1^3, zbroj iduća dva broja je 2^3, zbroj iduća tri broja je 3^3 i tako dalje:

$$\underbrace{1,}_{1^3}\ \underbrace{3,\ 5,}_{2^3}\ \underbrace{7,\ 9,\ 11,}_{3^3}\ \underbrace{13,\ 15,\ 17,\ 19,}_{4^3}\ \ldots \tag{1}$$

Nazovimo ovu opservaciju *Nikomahovom lemom.* Malo kasnije pokazat ćemo kako iz nje slijedi teorem 1. Najprije dokažimo druga dva poznata identiteta.

Lema 2. $1+2+3+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Dokaz. Formulu za zbroj prvih n prirodnih brojeva najlakše je dokazati Gaussovim trikom. Označimo sumu na lijevoj strani S_n i zbrojimo odgovarajuće članove dvije takve sume zapisane u rastućem i u padajućem

Date: 6.1.2025.

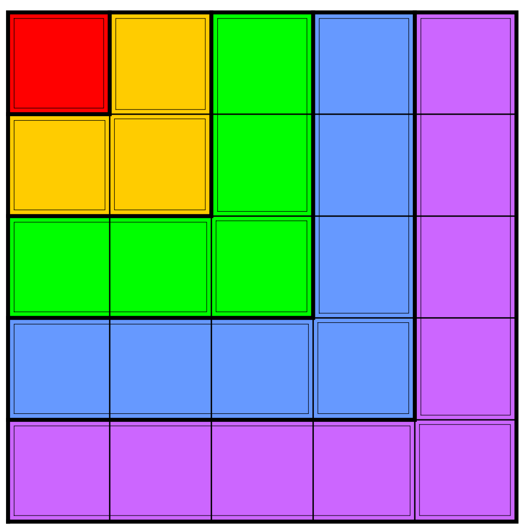
redoslijedu:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & S_n & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + \ldots + & n \\ + & S_n & = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + \ldots + & 1 \\ \hline & 2S_n & = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + \ldots + & (n+1) \end{array}$$

Na desnoj strani imamo n pribrojnika $n+1$, pa je $2S_n = n(n+1)$, tj. $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. □

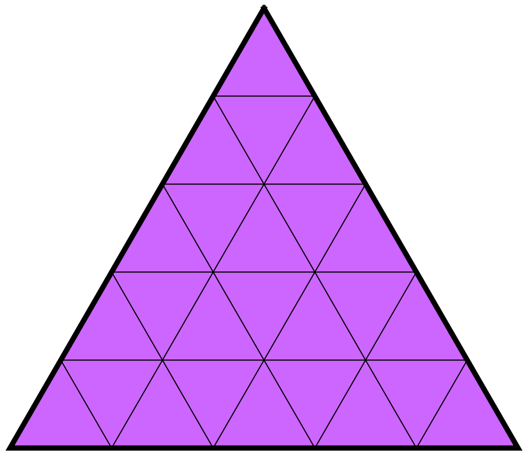
Lema 3. $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Formulu za zbroj prvih n neparnih prirodnih brojeva također možemo dokazati Gaussovim trikom. Umjesto toga, na slici 1 prikazan je vizualni dokaz. Slika se odnosi na slučaj $n = 5$, ali u njoj je sadržana ideja dokaza matematičkom indukcijom. Vidimo da kvadrat sa stranicom duljine n možemo proširiti do kvadrata sa stranicom duljine $n+1$ dodavanjem dvaju pravokutnika dimenzija $1 \times n$ i $n \times 1$ te kvadrata 1×1, tj. dodavanjem idućeg pribrojnika $2n+1$. □



Slika 1. Dokaz leme 3 za $n = 5$.

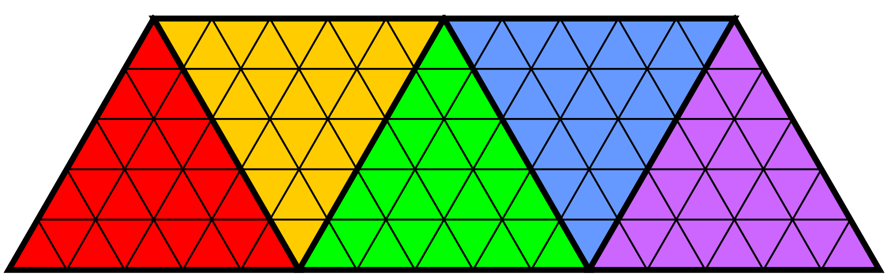
Po Nikomahovoj lemi (1), zbroj kubova prvih n prirodnih brojeva jednak je zbroju prvih $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ neparnih prirodnih brojeva. Po lemi 3 to je upravo kvadrat tog broja, tj. $(1+2+\ldots+n)^2$. Time smo dokazali teorem 1, no kako dokazati Nikomahovu lemu? Prezentirat ćemo vizualni dokaz.



Slika 2. Podjela jednakostraničnog trokuta za $n = 5$.

Na slici 2 prikazan je jednakostraničan trokut sa stranicom duljine $n = 5$ podijeljen na trokutiće s jediničnim stranicama. U najvišem retku je jedan trokutić, u retku ispod su tri trokutića, u idućem retku pet trokutića i tako dalje. Prema lemi 3, ukupan broj trokutića je n^2. Iz ove slike i formule za površinu jednakostraničnog trokuta $P = \frac{n^2\sqrt{3}}{4}$ dobivamo još jedan, geometrijski dokaz leme 3!

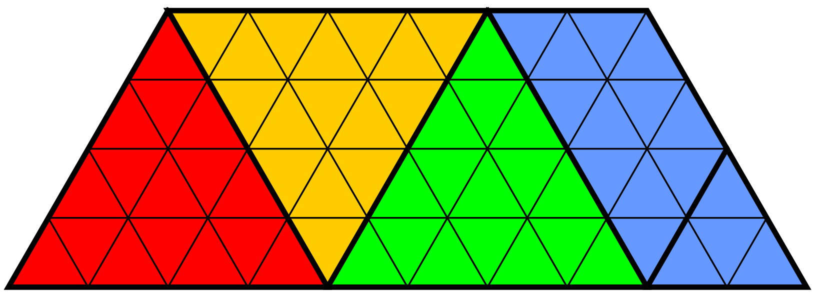
Za dokaz Nikomahove leme, uzmimo n podijeljenih jednakostraničnih trokuta sa stranicom duljine n i složimo ih kao na slici 3. Ukupan broj jediničnih trokutića je tada $n \cdot n^2 = n^3$. S druge strane, prebrojimo koliko je trokutića u pojedinim recima. Za neparni n imamo $\frac{n+1}{2}$ velikih trokuta okrenutih vrhom prema gore i $\frac{n-1}{2}$ velikih trokuta okrenutih stranicom prema gore. Stoga u najvišem retku imamo $\frac{n+1}{2} \cdot 1 + \frac{n-1}{2} \cdot (2n - 1) = n^2 - n + 1$ trokutića. Isti broj dobivamo kao prvi član n-te zagrade u (1). To je N-ti neparni broj za



Slika 3. Dokaz Nikomahove leme za $n = 5$.

$N = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + 1 = \frac{(n-1)n}{2} + 1$ (koristimo lemu 2). Uvrštavanjem tog izraza u $2N-1$ i sređivanjem dobivamo također $n^2 - n + 1$. Svaki idući redak ima dva trokutića više, pa je ukupan broj trokutića na slici 3 jednak zbroju svih brojeva iz n-te zagrade u (1). Tako dobivamo tvrdnju Nikomahove leme za neparni n.

Za parni n treba modificirati dokaz kao na slici 4. Zadnji trokut okrenut je stranicom prema gore, pa ga transformiramo u paralelogram premještanjem gornjeg desnog kuta sa stranicom duljine $\frac{n}{2}$. Prebrojavanjem trokutića u pojedinim recima dolazimo do istog zaključka.

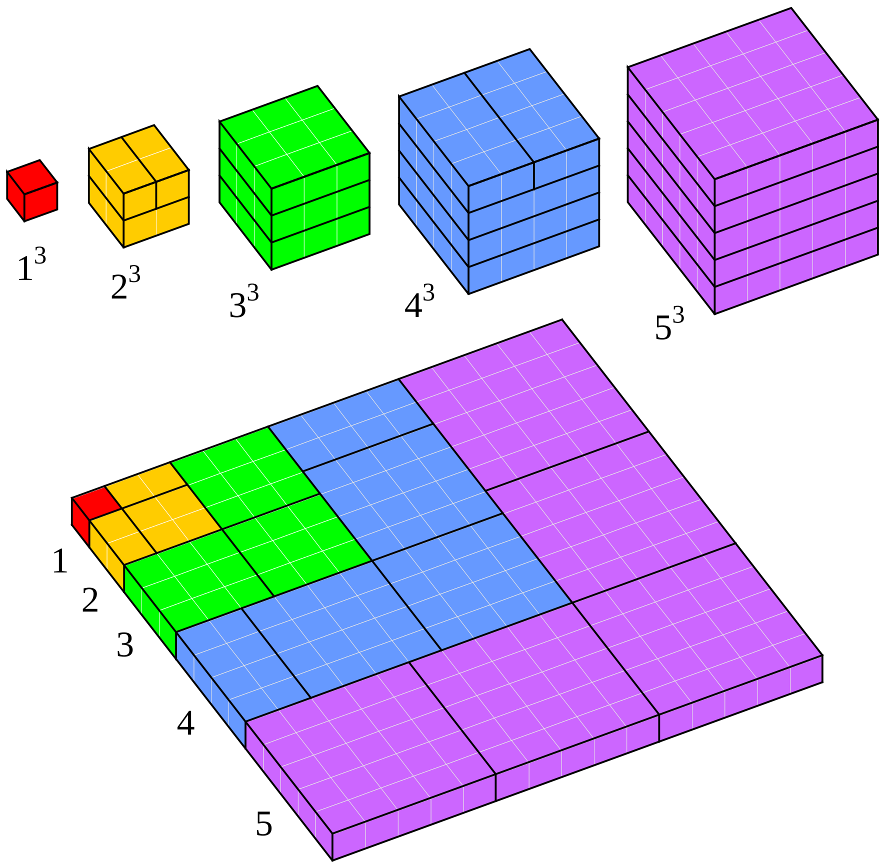


Slika 4. Dokaz Nikomahove leme za $n = 4$.

U članku na Wikipediji [7] dan je još jedan vizualni dokaz Nikomahova teorema, sličan dokazu leme 3 (slika 5). Promotrimo kocke sa stranicama duljina $1, 2, \ldots, n$ podijeljene na jedinične kockice. Ukupan broj kockica odgovara zbroju kubova na desnoj strani teorema 1. Kocke možemo podijeliti na horizontalne slojeve i presložiti ih u kvadrat sa stranicom duljine $1 + 2 + \ldots + n$. Pritom za kocke s parnim stranicama jedan od slojeva dijelimo na pola. Animacije ova dva dokaza pogledajte na YouTubeu [3]. U knjizi [4] na str. 84–89 nalaze se i drugi vizualni dokazi Nikomahova teorema.

Ideju vizualnog dokaza na slici 5 možemo formalizirati kao dokaz matematičkom indukcijom. U članku [1] dana su dva kombinatorna dokaza Nikomahova teorema. Njihova ideja je interpretirati lijevu i desnu stranu kao broj elemenata konačnih skupova i uspostaviti bijekciju između tih skupova. Na primjer, desna strana u lemi 2 je binomni koeficijent $\binom{n+1}{2}$. Njegov kvadrat možemo interpretirati kao broj uređenih četvorki (x_1, x_2, x_3, x_4) cijelih brojeva koji zadovoljavaju $0 \le x_1 < x_2 \le n$ i $0 \le x_3 < x_4 \le n$. Autori članka [1] sugeriraju i kombinatorni dokaz formule za sumu kvadrata prirodnih brojeva:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{4}\binom{2n+2}{3}.$$



SLIKA 5. Dokaz teorema 1 za $n = 5$.

Povijesno, potreba za računanjem zbroja p-tih potencija prirodnih brojeva $1^p + 2^p + \ldots + n^p$ pojavljivala se pri određivanju površina i volumena nekih geometrijskih likova i tijela [5]. Opću formulu naslutio je Jakob Bernoulli:

$$1^p + 2^p + \ldots + n^p = \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^{p} \binom{p+1}{i} B_i \, n^{p+1-i}.$$

Ovdje su $(B_i)_{i=0}^{\infty} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, \frac{-1}{30}, 0, \frac{1}{42}, 0, \frac{-1}{30}, 0, \frac{5}{66}, 0, \frac{-691}{2730}, 0, \ldots)$ takozvani Bernoullijevi brojevi, koji se pojavljuju u matematičkoj analizi i u kombinatorici. Jedna od metoda za izvođenje ovakvih formula je diferencijski račun. To je diskretna verzija diferencijalnog i integralnog računa u kojoj sume računamo na analogni način kao integrale. Popularizirali su je Donald Knuth i koautori u cjelini 2.6 knjige *Concrete mathematics* [2].

Literatura

[1] A. T. Benjamin, M. E. Orrison, *Two quick combinatorial proofs of* $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \binom{n+1}{2}^2$, The College Mathematics Journal **33** (2002), No. 5, 406–408.

[2] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Concrete mathematics, 2nd edition*, Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

[3] Mathematical Visual Proofs, *A new year 2025 math fact*, siječanj 2025. `https://www.youtube.com/watch?v=ZWLkIW4NsQ0`

[4] R. B. Nelsen, *Proofs without words. Exercises in visual thinking*, Mathematical Association of America, 1993.

[5] D. J. Pengelley, *The bridge between the continuous and the discrete via original sources*, u *Study the masters: The Abel-Fauvel conference* (uredinici O. B. Bekken i R. Mosvold), National Center for Mathematics Education, University of Gothenburg, 2003.

[6] Wikipedia, *Nicomachus*, siječanj 2025. `https://en.wikipedia.org/wiki/Nicomachus`

[7] Wikipedia, *Squared triangular number*, siječanj 2025. `https://en.wikipedia.org/wiki/Squared_triangular_number`