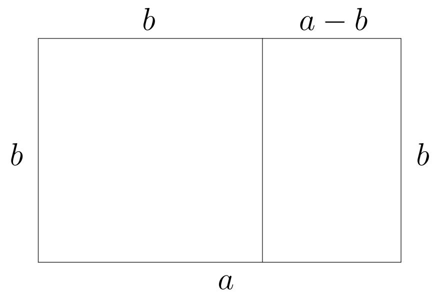
METALNI REZOVI

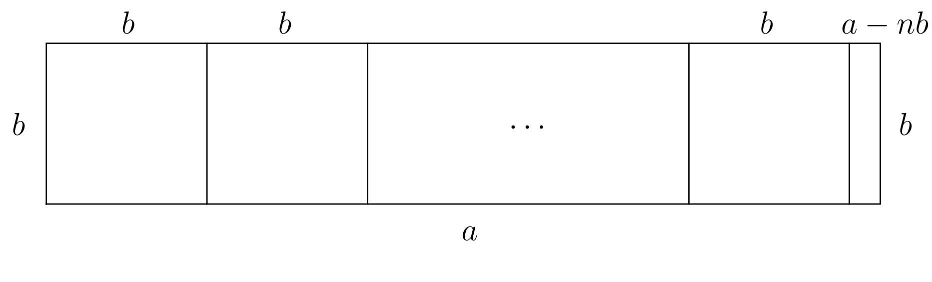
VEDRAN KRČADINAC I MARIJANA VRDOLJAK

1. Uvod

Neka je zadan pravokutnik s duljinama stranica u omjeru zlatnog reza, $a : b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Poznato je da ga možemo rastaviti na kvadrat sa stranicom duljine b i pravokutnik kojem su stranice također u omjeru zlatnog reza, $b : (a - b) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



Želimo generalizirati to svojstvo na "izduženije" pravokutnike. Zanima nas u kojem omjeru trebaju biti stranice pravokutnika tako da ga možemo rastaviti na n kvadrata i jedan pravokutnik sa stranicama u istom omjeru kao početni, pri čemu je n prirodan broj.



Teorem 1.1. *Neka su $a > b > 0$ realni brojevi (duljine stranica pravokutnika) i n prirodan broj (broj kvadrata na koje dijelimo pravokutnik) takav da je $a - nb > 0$. Vrijedi $a : b = b : (a - nb)$ ako i samo ako je $a : b = \frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi $a : b = b : (a - nb)$ i označimo traženi omjer s $x = a : b$. "Obrnemo" li jednakost omjera, $b : a = (a - nb) : b$, možemo je napisati kao $\frac{1}{x} = x - n$. Množenjem s x dobivamo kvadratnu jednadžbu $x^2 - nx - 1 = 0$ čija su rješenja $x_{1,2} = \frac{n \pm \sqrt{n^2+4}}{2}$. Omjer $a : b$ očito je jednak pozitivnom od ta dva broja, $\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}$. Obratno, ako se zadani brojevi odnose kao $a : b = \frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}$, lako se provjeri da je i $b : (a - nb) = \frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}$. □

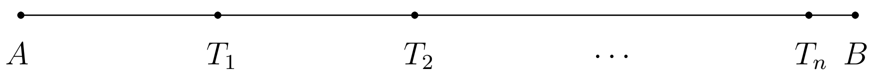
Brojeve $\phi_n = \frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}$ zovemo *metalnim rezovima*. Prvi član niza $\phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ je poznati *zlatni rez*, drugi $\phi_2 = 1 + \sqrt{2}$ zovemo *srebrnim rezom*, treći $\phi_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ *brončanim rezom* itd. Predlažemo čitateljima da im daju imena sukladno vlastitom afinitetu prema (plemenitim) metalima. U ovom članku vidjet ćemo da se mnoga svojstva zlatnog reza mogu generalizirati na sve ostale metalne rezove.

2. Metalni rezovi u geometriji

Omjer zlatnog reza spominje se već u Euklidovim "Elementima". Euklid ga zove *krajnjim i srednjim omjerom* i definira kao omjer kod kojeg se dužina odnosi prema većem dijelu na koji je podijeljena isto kao veći dio prema manjem:

$$|AB| : |AT| = |AT| : |TB|.$$

Na sličan način možemo doći do metalnih rezova. Podijelimo dužinu $\overline{AB}$ točkama $T_1, \ldots, T_n$ na n "veći dijelova", tj. dužina $\overline{AT_1}$, $\overline{T_1T_2}, \ldots$ $\overline{T_{n-1}T_n}$ duljine a, i jedan "manji dio" $\overline{T_nB}$ duljine b.



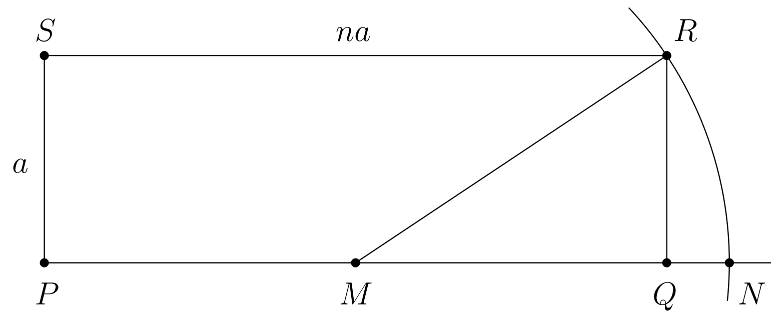
Tada se duljina cijele dužine $na + b$ odnosi prema većem dijelu a isto kao a prema b ako i samo ako je taj omjer jednak ϕ_n. Zaista, iz $(na+b) : a = a : b$ odmah vidimo da $x = a : b$ zadovoljava kvadratnu jednadžbu $x^2 - nx - 1 = 0$, a vrijedi i obratna tvrdnja.

Zlatni rez se u "Elementima" prvi puta pojavljuje u II. knjizi, u propoziciji 11. Euklid tu propoziciju koristi u IV. knjizi za konstrukciju pravilnog peterokuta i drugih likova. Formalnu definiciju zlatnog reza daje tek u VI. knjizi, pošto je u V. knjizi razvio teoriju proporcija.

Zlatni rez se više puta spominje u posljednjoj, XIII. knjizi "Elemenata", posvećenoj stereometriji, vezano uz ikosaedar i dodekaedar.

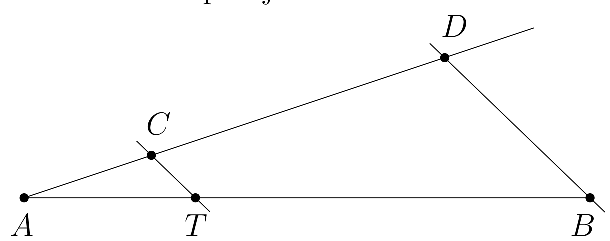
Euklid u VI. knjizi "Elemenata" opisuje konstrukciju s pomoću ravnala i šestara točke koja zadanu dužinu dijeli u omjeru zlatnog reza. Generalizirat ćemo tu konstrukciju na ostale metalne rezove.

Teorem 2.1. *Neka je $PQRS$ pravokutnik sa stranicama duljine $|PS| = |QR| = a$ i $|PQ| = |RS| = na$. Neka je M polovište dužine $\overline{PQ}$ i N točka na pravcu PQ takva da je $|MN| = |MR|$ i da su N i Q s iste strane u odnosu na M. Tada se duljine dužina $\overline{PN}$ i $\overline{PS}$ odnose u omjeru n-tog metalnog reza, tj. $|PN| : |PS| = \phi_n$.*



Dokaz. Prema Pitagorinu poučku vrijedi $|MR| = \sqrt{|MQ|^2 + |QR|^2} = \sqrt{\left(\frac{na}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{\sqrt{n^2+4}}{2}\,a$. Stoga je $|PN| = |PM| + |MN| = |PM| + |MR| = \frac{na}{2} + \frac{\sqrt{n^2+4}}{2}\,a = \frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\,a = \phi_n\,|PS|$. □

U prethodnom teoremu vidjeli smo kako konstruirati dvije dužine $\overline{PN}$ i $\overline{PS}$ u omjeru n-tog metalnog reza. S pomoću Talesova teorema o proporcionalnosti možemo podijeliti zadanu dužinu $\overline{AB}$ u tom omjeru.



Narctamo proizvoljan pravac kroz A različit od pravca AB i nanesemo na njega točke C i D takve da je $|AC| = |PS|$ i $|AD| = |PN|$. Konstruiramo paralelu s pravcem BD kroz točku C i neka ona siječe pravac AB u točki T. Onda je po Talesovu teoremu $|AB| : |AT| = |AD| : |AC| = |PN| : |PS| = \phi_n$.

U diplomskom radu [6] dane su "metalne generalizacije" drugih Euklidovih propozicija o zlatnom rezu.

3. Metalni Fibonaccijevi brojevi i verižni razlomci

Poznate su veze zlatnog reza s nizom Fibonaccijevih brojeva

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \ldots$$

u kojem se sljedeći član dobiva kao zbroj dvaju prethodnih. Zlatni rez se pojavljuje u Binetovoj formuli za k-ti Fibonaccijev broj, a omjer dvaju susjednih Fibonaccijevih brojeva teži ka $\phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ kada $k \to \infty$. Taj se omjer pojavljuje kao konvergenta u prikazu zlatnog reza kao verižnog razlomka

$$\phi_1 = 1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}}.$$

Generalizirat ćemo te tvrdnje na metalne rezove. Prvo definiramo *n-ti metalni niz Fibonaccijevih brojeva* rekurzijom $F_{k+1}^{(n)} = nF_k^{(n)} + F_{k-1}^{(n)}$, $k \geq 1$ i početnim uvjetima $F_0^{(n)} = 0$, $F_1^{(n)} = 1$. Niz $(F_k^{(1)})$ čine uobičajeni Fibonaccijevi brojevi, a sljedeći po redu je niz

$$(F_k^{(2)}) = (0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 13860, \ldots).$$

Znamo da je $\phi_n = \frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}$ rješenje kvadratne jednadžbe $x^2 - nx - 1 = 0$. Drugo rješenje te jednadžbe označimo s $\psi_n = \frac{n-\sqrt{n^2+4}}{2}$. S pomoću ta dva broja možemo napisati formulu za metalne Fibonaccijeve brojeve koja generalizira Binetovu formulu.

Teorem 3.1. *Za sve prirodne brojeve $n \geq 1$ i $k \geq 0$ vrijedi*

$$F_k^{(n)} = \frac{(\phi_n)^k - (\psi_n)^k}{\sqrt{n^2+4}}.$$

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom po k. Formula očito vrijedi za $k = 0$ i $k = 1$. Pretpostavimo da vrijedi za $k-1$ i k. Koristeći se rekurzijom i relacijama $n\phi_n + 1 = (\phi_n)^2$ i $n\psi_n + 1 = (\psi_n)^2$ (koje slijede iz ranije spomenute kvadratne jednadžbe), izračunajmo $F_{k+1}^{(n)} = nF_k^{(n)} + F_{k-1}^{(n)} = \frac{n}{\sqrt{n^2+4}}\left[(\phi_n)^k - (\psi_n)^k\right] + \frac{1}{\sqrt{n^2+4}}\left[(\phi_n)^{k-1} - (\psi_n)^{k-1}\right] = \frac{1}{\sqrt{n^2+4}}\left[(\phi_n)^{k-1}(n\phi_n+1) - (\psi_n)^{k-1}(n\psi_n+1)\right] = \frac{1}{\sqrt{n^2+4}}\left[(\phi_n)^{k+1} - (\psi_n)^{k+1}\right]$. Vidimo da formula vrijedi i za $k+1$, pa po principu matematičke indukcije vrijedi za svaki $k \geq 0$. □

Iz Binetove formule dobivamo konvergenciju omjera susjednih metalnih Fibonaccijevih brojeva ka ϕ_n.

Teorem 3.2. *Za svaki $n \geq 1$ vrijedi* $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{F_{k+1}^{(n)}}{F_k^{(n)}} = \phi_n$.

Dokaz. Omjer $\frac{\psi_n}{\phi_n}$ je po apsolutnoj vrijednosti manji od jedan, pa je $\lim\limits_{k\to\infty}(\frac{\psi_n}{\phi_n})^k = 0$. Stoga vrijedi $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{F_{k+1}^{(n)}}{F_k^{(n)}} = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{(\phi_n)^{k+1}-(\psi_n)^{k+1}}{(\phi_n)^k-(\psi_n)^k} = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{\phi_n-\psi_n(\frac{\psi_n}{\phi_n})^k}{1-(\frac{\psi_n}{\phi_n})^k} = \frac{\phi_n-\psi_n\lim\limits_{k\to\infty}(\frac{\psi_n}{\phi_n})^k}{1-\lim\limits_{k\to\infty}(\frac{\psi_n}{\phi_n})^k} = \phi_n$. □

Sada možemo dokazati prikaz n-tog metalnog reza kao verižnog razlomka:

$$\phi_n = n + \cfrac{1}{n + \frac{1}{n+\frac{1}{n+\dots}}}.$$

Riječ je zapravo o konvergenciji niza $K_0 = n$, $K_1 = n + \frac{1}{n}$, $K_2 = n + \frac{1}{n+\frac{1}{n}}, \dots$ zadanog rekurzijom $K_k = n + \frac{1}{K_{k-1}}$, $k \geq 1$. Članove tog niza zovemo *konvergentama* verižnog razlomka. Da je njegov limes jednak ϕ_n slijedi iz prikaza $K_k = \frac{F_{k+1}^{(n)}}{F_k^{(n)}}$, koji se lako dokazuje indukcijom:

$$K_k = n + \frac{1}{K_{k-1}} = n + \frac{F_{k-1}^{(n)}}{F_k^{(n)}} = \frac{nF_k^{(n)} + F_{k-1}^{(n)}}{F_k^{(n)}} = \frac{F_{k+1}^{(n)}}{F_k^{(n)}}.$$

Zlatni rez može se prikazati i kao "beskonačni korijen"

$$\phi_1 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}.$$

Generalizacija tog prikaza na metalne rezove glasi

$$\phi_n = \sqrt{1 + n\sqrt{1 + n\sqrt{1 + n\sqrt{1 + \dots}}}}.$$

U knjižici [2] sabrana su mnoga svojstva i relacije koje vrijede za Fibonaccijeve brojeve. Ovo su generalizacije triju takvih relacija na odgovarajuće metalne nizove brojeva:

$$(F_k^{(n)})^2 + (F_{k+1}^{(n)})^2 = F_{2k+1}^{(n)},$$

$$F_1^{(n)} + F_3^{(n)} + F_5^{(n)} + \dots + F_{2k-1}^{(n)} = \frac{1}{n}F_{2k}^{(n)},$$

$$F_2^{(n)} + F_4^{(n)} + F_6^{(n)} + \dots + F_{2k}^{(n)} = \frac{1}{n}(F_{2k+1}^{(n)} - 1).$$

Pozivamo čitatelje da ih dokažu te da pokušaju generalizirati druge tvrdnje iz [2].

4. Zaključak

U ovom radu opisali smo jednu jednostavnu generalizaciju zlatnog reza. Dokazali smo generalizirane verzije nekih teorema o zlatnom rezu, uglavnom slijedeći ideje iznesene u članku [1]. Postoje mnoge druge generalizacije zlatnog reza, npr. [3]. Neke od njih obrađene su u diplomskom radu [6].

Zlatnom rezu stoljećima se pripisuju estetska i pomalo mistična svojstva. Navodno se omjer zlatnog reza pojavljuje u egipatskim piramidama, grčkim hramovima, slikama i skulpturama slavnih majstora, u proporcijama ljudskog tijela, rastu nekih biljaka i u ljušturama nekih glavonožaca, pa čak i u kretanju cijena dionica na tržištu. Vjerodostojnost takvih tvrdnji je upitna (vidi [4] i [5]), a kroz generalizacije vidimo da ni teoremi o zlatnom rezu ne proizlaze iz magičnih svojstava broja $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Prema našem mišljenju to nimalo ne umanjuje ljepotu tih teorema.

Literatura

[1] D.B. Coleman, *The Silver ratio: a vehicle for generalization*, Mathematics Teacher **82** (1989), 54–59.

[2] A. Dujella, *Fibonaccijevi brojevi*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 2000.

[3] V. Krčadinac, *A new generalization of the Golden ratio*, The Fibonacci Quarterly **44** (2006), 335–340.

[4] G. Markowsky, *Misconceptions about the Golden ratio*, College Mathematics Journal **23** (1992), 2–19.

[5] Z. Šikić, *Istine i laži o zlatnom rezu*, Poučak **15** (2003), 50–70.

[6] M. Vrdoljak, *Generalizacije zlatnog reza*, diplomski rad, PMF-Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, 2009.