Donja granica za R(3,k) koristeći projektivne ravnine

Luka Berković

1 Uvod

Ramseyev teorem je rezultat kojeg je 1928. dokazao Frank Ramsey za uporabu u matematičkoj logici. Kasnije se Ramseyev teorem pokazao kao koristan alat pri rješavanju problema iz mnogih drugih područja poput geometrije, teorije brojeva i teorije grafova u kojoj se smatra jedan od fundamentalnih rezultata. Ramseyeva teorija, koja se bavi proučavanjem i asimptotikom Ramseyevih struktura i svojstva, je i danas puna otvorenih problema. Neki od njih se bave Ramseyevim brojevima, koji prirodno proizlaze iz samog Ramseyevog teorema. Ovdje ćemo konstruirati grafove s pomoću konačnih projektivnih ravnina PG(2,q) koji će služiti kao primjeri grafova koji ne sadrže trokute te nemaju "prevelike" nezavisne skupove. Koristeći te grafove pokazati ćemo da je $R(3,k) = \Omega(k^{3/2})$. (Napomena: danas je poznato da je $R(3,k) = \Theta(\frac{k^2}{logk})$, ali taj se rezultat dokazuje s kompliciranijim vjerojatnosnim metodama te ne koristi projektivnu geometriju pa ga ovdje nećemo navoditi.)

2 Ramseyevi brojevi i Ramsiyev teorem

Ponovimo prvo neke osnovne definicije teorije grafova:

Definicija 2.1. *Graf G je uređeni par konačnih skupova vrhova koje označavamo s V(G) i bridova koje označavamo s E(G) gdje je $E(G) \subseteq V(G) \times V(G)$ s time da ne dopuštamo bridove oblika $\{v, v'\}$ za v=v' te bridovi nisu uređeni parovi nego dvočlani skupovi. Za G t.d. $|V(G)| = n$ kažemo da je graf na n vrhova.*

Definicija 2.2. *Potpuni graf na n vrhova, oznaka K_n, je graf G t. d. $\{v_i, v_j\} \in E(G),\ \forall i < j \leq n$.*

Definicija 2.3. *Dvo-bojanje grafa G je svako preslikavanje $\phi : E(G) \to \{1, 2\}$. Za graf $H \subseteq G$ kažemo da je jednobojan (ili monokromatski) pod preslikavanjem ϕ, ako $E(H) \subseteq \phi^{-1}(1)$ ili $E(H) \subseteq \phi^{-1}(2)$*

Definicija 2.4. *Ramsyev broj $R(s,k)$ je $\min n \in \mathbb{N}$ t.d. svako dvo-bojanje grafa K_n sadrži jednobojni K_s (u prvoj boji) ili jednobojni K_k (u drugoj boji) .*

Sada možemo postaviti prirodno pitanje jeli takva definicija uopće dobra, moramo li pisati inf umjesto min?
Odgovor na to nam daje Ramseyev teorem:

Theorem 2.5 (Ramseyjev teorem)**.** $R(s,k) < \infty,\ \forall k, s \in \mathbb{N}$

Ramseyev teorem ćemo dokazati, koristeći se sljedećom lemom:

Lemma 2.6 (Erdos)**.** $R(s,k) \leq R(s-1,k) + R(s,k-1)$

Proof. Neka je R:= R(s-1,k) + R(s,k-1). I neka je G graf na R vrhova. Uzmimo proizvoljno dvo -bojanje grafa. Neka je v proizvoljni vrh grafa G, v je povezan s R(s-1,k) + R(s,k-1) -1 vrhova. Znači da je u jednoj boji povezan s barem R(s-1,k) ili R(s,k-1) vrhova. BSO v je povezan s

R(s-1,k) vrhova u jednoj boji. Po definiciji broja R(s-1,k) je v povezan s monokoromim K_k (u kojem slučaju smo gotovi) ili s monokoromim K_{s-1}, ali budući da je v povezan s jednom bojom sa svakim vrhom od K_{s-1} imamo jedno bojni K_s. □

Koristeći lemu 2.6 ne samo da smo dokazali da su svi Ramseyevi brojevi konačni nego možemo dati gornju ogradu za konkretne s, k.
Prisjetimo se Pascalove formule:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Sada budući da je $R(2,k) = k = \binom{k}{1} = \binom{s+k-2}{s-1}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ (i s=2) imamo

$$R(s,k) \leq R(s-1,k) + R(s,k-1) \leq \binom{s+k-3}{s-2} + \binom{s+k-3}{s-1} = \binom{s+k-2}{s-1}.$$

Sada uvodimo standardnu notaciju koja će nam olakšati zapis rezultata:

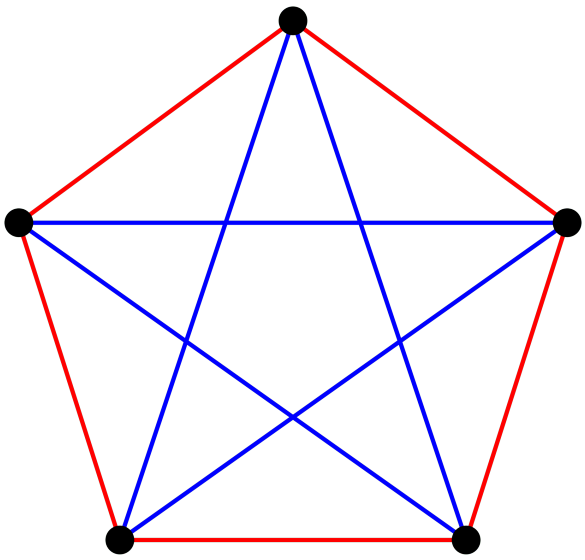
Definicija 2.7. *Za funkcije $f, g : X \to \mathbb{R}$ kažemo*

- $f(x) = O(g(x)) \iff \exists C > 0, \exists x_0 \ t.d. \ \forall x > x_0, \ |f(x)| \leq Cg(x)$
- $f(x) = o(g(x)) \iff \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
- $f(x) = \Omega(g(x)) \iff g(x) = O(f(x))$
- $f(x) = \Theta(g(x)) \iff f(x) = O(g(x)) \ i \ g(x) = O(f(x))$

Takva notacija se zove "Big O" ili Bachmann–Landau notacija i omogućuje nam lakše baratanje s funkcijama.

3 R(3,k)

Iz $R(s,k) \leq \binom{s+k-2}{s-1}$ slijedi $R(3,3) \leq 6$ (za s=k=3). Da bismo mogli zaključiti R(3,3)=6 trebali bismo naći dvo-bojanje K_5 koje ne sadrži niti jedan jednobojni trokut npr. :



Sada uvodimo još neke pojmove koji će nam biti korisni pri procjeni asimptotike R(3,k):

Definicija 3.1. *Za $I \subseteq V(G)$ kažemo da je nezavisni skup grafa G, ako $\forall u, v \in I : \{u, v\} \notin E(G)$, $\alpha(G) = \max\{|I| : I \subseteq V(G)$ je nezavisan skup$\}$..*

Definicija 3.2. *Za graf G kažemo da ne sadrži trokut, ako $K_3 \nsubseteq G$.*

Da bismo pokazali da je R(3,k)>n pronaći ćemo graf na G n vrhova koji ne sadrži trokut i za koji vrijedi $\alpha(G) < k$. Sljedeća lema nam govori da je to ekvivalentno:

Lemma 3.3. *Ako graf G na n vrhova ne sadrži trokut i $\alpha(G) < k \implies R(3, k) > n$.*

Proof. Obojimo bridove grafa G plavom bojom, a nebridove crvenom bojom. Tada dobivamo dvo-bojanje K_n koje ne sadrži plavi trokut niti crveni K_k (u protivnom bi $\alpha(G) \geq k$. □

Dokazat ćemo:

Theorem 3.4. $R(3, k) = \Omega(k^{3/2})$

Teorem 3.4. dokazat ćemo konstrukcijom grafa koristeći projektivnu ravninu PG(2,q).

Podsjetnik na neka svojstva od PG(2,q):

1. PG(2,q) ima $q^2 + q + 1$ različitih točaka
2. PG(2,q) ima $q^2 + q + 1$ različitih pravaca
3. na svakom se pravcu nalazi točno q +1 različitih točaka
4. svaka dva različita pravca se sijeku u točno jednoj točki
5. svake dvije različite točke određuju jedinstveni pravac.

3.1 Konstrukcija

Vrhovi našeg grafa G su svi parovi (T, p) gdje je T točka projektivne ravnine PG(2,q), a p pravac te iste projektivne ravnine t.d. $T \in p$. Enumerirajmo sve parove (T, p).
Vrhovi (T, p) i (T', p') čine brid, ako $T \neq T'$, $p \neq p'$ i $T \in p'$, ako $(T, p) < (T', p')$ ili $T' \in p$, ako $(T', p') < (T, p)$ tj.

$$V(G) := \{(T, p) : T \text{ je točka u } PG(2, q), p \text{ je pravac u } PG(2, q) \text{ i } T \in p\},$$
$$((T, p), (T', p')) \in E(G) \iff T \neq T', p \neq p' \wedge (((T, p) < (T', p') \wedge T \in p') \vee ((T', p') < (T, p) \wedge T' \in p))$$

Tako konstruiran graf ima $(q^2 + q + 1) * (q + 1) = \Theta(q^3)$ različitih vrhova (broj različitih točaka * broj pravaca na kojima se nalaze).

Lemma 3.5. *G iz 3.1. ne sadrži trokut.*

Proof. Pretpostavimo suprotno tj. da G sadrži trokut. Onda postoje neka tri vrha: $(T_i, p_i), (T_j, p_j), (T_l, p_l)$ (BSO: $(T_i, p_i) < (T_j, p_j) < (T_l, p_l)$) t.d. u parovima čine brid (po gornjoj konstrukciji). Budući da su $(T_i, p_i), (T_j, p_j), (T_l, p_l)$ vrhovi našeg grafa vrijedi $T_i \in p_i, T_j \in p_j, T_l \in p_l$, zbog $T_i < T_j$ i činjenice da je $(T_i, p_i), (T_j, p_j)$ brid grafa vrijedi $T_i \in p_j$, analogno $T_j \in p_l$ i $T_i \in p_l$ $(T_i < T_l)$, ali onda imamo $T_i, T_j \in p_j$, $T_i, T_j \in p_l$ pa po svojstvu 5. (od PG(2,q)) imamo $p_j = p_l \implies\impliedby$. □

Definirajmo sada novi graf koji ćemo koristi pri procjeni $\alpha(G)$:

Definicija 3.6. *Za graf H čiji su vrhovi točke i pravci projektivne ravnine PG(2,q), a bridovi svi parovi pravac točka t.d. se ta točka nalazi na pravcu tj. $E(H) = \{\{T, p\} : T \in p\}$. kažemo da je graf incidencije. (Primijetite da su bridovi od H upravo vrhovi od G iz gornje konstrukcije).*

Dakle H je graf na $2(q^2+q+1)$ vrhova (svi pravci + sve točke). Prisjetimo se još jedne definicije iz teorije grafova:

Definicija 3.7. *Za graf C na n vrhova kažemo da je ciklički, ako V(C)=* $\{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ *i E(C)=*$\{\{v_i, v_{i+1}\} : 0 \leq i \leq n-1\}$ *(uz* $v_0 = v_n$*). Obično ga označavamo s* C_n*.*

Dokažimo sada jedno opće svojstva grafova:

Lemma 3.8. *Graf sa n (*≥ 3*) vrhova i n bridova sadrži ciklus veličine* ≥ 3*.*

Proof. Dokaz provodimo indukcijom.
Baza: Za $n = 3$ jedini graf s tri vrha i tri brida je K_3 (jer ne dopuštamo dvostruke bridove ni petlje po def. 1.1), a C_3=K_3.

Korak: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve grafove s manje od n vrhova, (ako postoji vrh koji ne pripada niti jednom bridu onda ga možemo izbrisati kao i proizvoljni brid pa po pretpostavci indukcije slijedi tvrdnja, dakle BSO takav vrh ne postoji). Neka je G graf s n vrhova koji ne sadrži ciklus. Budući da G ne sadrži ciklus, postoji vrh v koji pripada točno 1. bridu (kada bi svaki vrh pripadao barem 2 brida mogli bismo napraviti niz različitih vrhova od proizvoljnog početnog vrha $(v_0, v_1, \ldots)$ što je kontradiktorno s konačnim brojem vrhova). Uklonimo vrh v i sve bridove kojima on pripada (postoji samo jedan). Dobiveni graf G' ima $n-1$ vrhova i $n-1$ vrhova te ne sadrži ciklus veličine ≥ 3 (kao podgraf grafa koji ne sadrži ciklus veličine ≥ 3). Što je kontradiktorno s pretpostavkom indukcije.

□

Lemma 3.9. $\alpha(G) < 2(q^2+q+1)$

Proof. Pretpostavimo suprotno tj. da postoji nezavisni skup veličine barem $n = 2(q^2+q+1)$. Budući da ti vrhovi odgovaraju skupu od n bridova incidenciskog grafa H, koji ima n vrhova, među tim bridovima mora postojati ciklus duljine $m \geq 3$ (po lemi 3.8.). Neka je taj ciklus:

$$(T_0, p_0, T_1, p_1, \ldots, T_{m-1}, p_{m-1}, T_0).$$

Budući da je riječ o ciklusu, a vrhovi grafa G su enumerirani, postoji indeks $0 \leq i < m$ t. d. vrijedi

$$(T_{i+1}, p_{i+1}) < (T_i, p_i),$$

No onda je $\{(T_i, p_i), (T_{i+1}, p_{i+1})\}$ brid u G (jer $T_{i+1} \in p_i$ zato što je $\{T_{i+1}, p_i\}$ brid u H). $\Longrightarrow\Longleftarrow$.

□

3.2 Asimptotika R(3,k)

Uzmimo $k = 2(q^2+q+1)$. Onda za naš graf G iz 3.1. vrijedi (po 3.2.) G ne sadrži trokut i $\alpha(G) < k$.
Po lemi 3.3. $\Longrightarrow R(3,k) > |V(G)|$ iz $k = \Theta(q^2)$ i $|V(G)| = \Theta(q^3)$.
Znači imamo $|V(G)| = \Theta(k^{3/2})$.
Dakle vrijedi teorem 3.4.:

$$\boxed{R(3,k) = \Omega(k^{3/2}).}$$

4 Literatura

1. Ramsey theory—lecture notes, Yuval Wigderson
2. Ramsey Theory, Ronald L. Graham, Bruce L. Rothschild, Joel H. Spencer
3. The Triangle-Free Process,Tom Bohman
4. Finite Geometry and Ramsey Theory, Anurag Bishnoi
5. Introduction to Graph Theory, Robin J. Wilson