PMF - MO

Za kolegij Projektivna geomertija

Vitopere pravčaste plohe

(Razlog odabira teme: može pomoći u rješavanju
šestog zadatka treće domaće zadaće)

Josipa Komlinović
(JMBAG:1191209268)

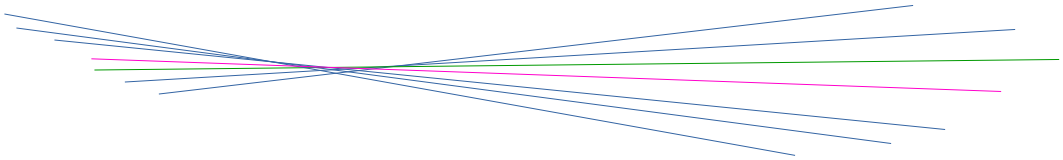
Prof. dr. sc. Vedran Krčadinac

Zagrab, ak. god. 2026./27.

1. Uvod; Definicija i značenje

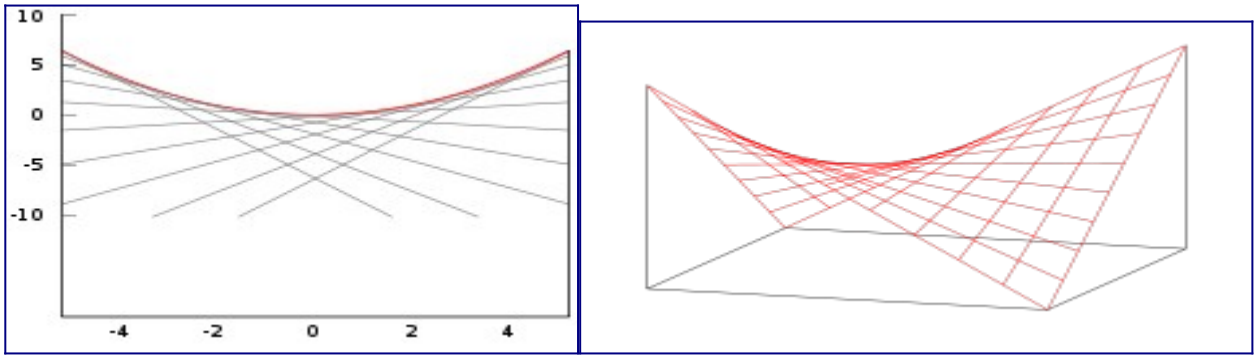
Vitoperost je matematički pojam definiran samo za pravčaste plohe. On nam kazuje koliko se jedna izvodnica (pravac pravčaste plohe e(u)) pomakla (s rotacijom ili bez nje, slobodnije rečeno: zaigrala u prostoru) da bi se poklopila sa sebi neizmjerno blizom izvodnicom (e(u+∧u)) promatrane pravčaste plohe. Pravčastu plohu možemo definirati kao (neprekinuti) niz neizmjerno blizih pravaca.

Vitopera pravčasta ploha je ona pravčasta ploha čija izvodnica stalno mijenja smjer uz dodatan uvjet da rezultat toga nije cilindrična ploha. (Svi cilindri i konusi nisu vitopere plohe.)



Upravo zato što je vitoperost mjerilo odnosa samih izvodnica, vitoperost u jednoj točki plohe ima isti iznos kao i u svim ostalim točkama tog istog pravca (te iste izvodnice).

Možda ćemo prije uočiti hiperbole i slično nego pravce neke takve plohe.

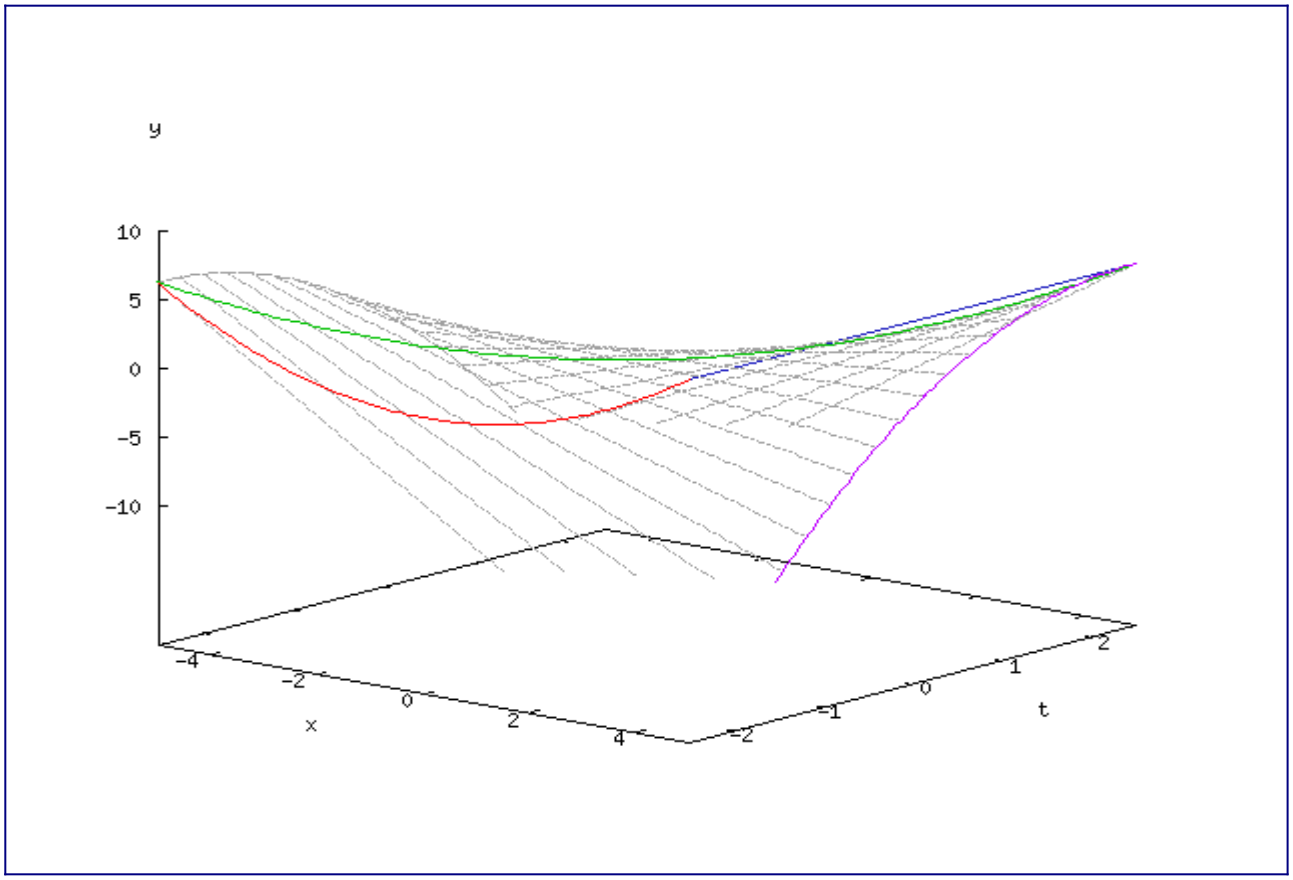


Postoje nekoliko načina konstrukcije (vitopere) pravčaste plohe, a najjednostavniji je sljedeći:

istaknemo jednu krivulju u prostoru (bilo koju: pravac, sinusoida, hiperbola, radi jednostavnosti bolje je odabrati onu koju možemo promatrati kao neprekidnu (i diferencijabilnu) funkciju jedne varijable) i određenim pravilom neprekidno nižemo pravce (buduće izvodnice (vitopere) pravčaste plohe) na odabranu krivulju.

(Moguće pravilo može biti da izvodnice prolaze kroz još jednu dodatnu krivulju ili najviše dvije dodatne krivulje, jer kroz ukupno četiri proizvoljne krivulje gotovo sigurno nećemo moći povući ni jedan pravac).

Također, pravčastu plohu možemo dobiti kao skup tangenata neke prostorne krivulje (koja nije cijela sadržana u ravnini).



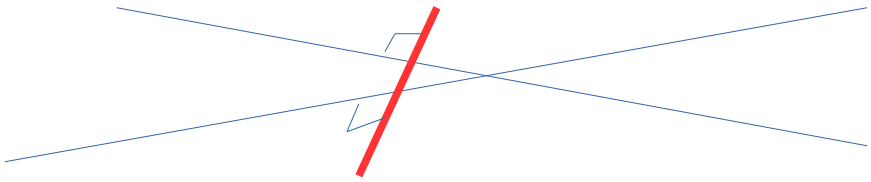
Svaku (vitoperu) pravčastu plohu možemo zapisati na sljedeći način:

$$q(u,v)=c(u)+v\,e(u)$$

gdje su u i v realni parametri, a $c(u)$ se naziva bazna krivulja (ako ploha nije pravčasta takav zapis nije moguć).

Vitoperost možemo definirati i kao funkciju sa pravčaste plohe u prostor funkcija jedne varijable (u našem slučaju to je varijabla u) i ona je definirana za svaku točku plohe u kojoj postoji jedinstvena tangencijalna ravnina, to jest (drugim riječima) za svaku regularnu točku plohe. Za regularnu pravčastu plohu vrijedi da je udaljenost između svake dvije izvodnice nula, ali njihov presjek je prazan skup.

Upravo kod vitoperih ploha bazna krivulja je jedinstvena jer kako izvodnica stalno mijanja smjer postoji jedinstveni pravac okomit na svake dvije (mimoilazne) izvodnice. (Radi lakšeg razumijevanja) promotrimo prvo bilo koja dva mimoilazna pravca. Postoji jedinstveni pravac okomit na na oba takva pravca (crveno istaknut). Promotrimo presjeke s tim okomitim pravcem. Njihova udaljenost, (to jest njihova duljina dužine čiji su ti presjeci rubovi) čini udaljenost tih dvaju mimoilaznih pravaca.



Budući da vrijedi da je udaljenost između svake dvije izvodnice nula, ali njihov presjek je prazan skup, od našeg jedinstvenog okomitog pravca (crveno istaknutog) ostala je samo točka. Ponovimo li postupak za svake dvije neizmjerno blize izvodnice dobit ćemo skup točaka koji čini baznu krivulju.

Vitoperost (u oznaci *d*) računamo po formuli:

$$d = \frac{det(c', e, e')}{|(e')|^2}$$

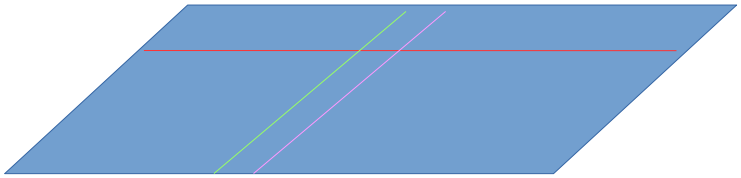
gdje je *c′* derivacija vektora *c(u)* po varijabli u. Isto tako je *e′* derivacija vektora *e(u)* po varijabli *u*. Brojnik je determinanta koju čine retci od kojih je prvi derivacija vektora *e(u)* po varijabli *u*, drugi redak je prepisan vektor *e*, a treći redak je derivacija vektora *e(u)* po varijabli *u*. Nazivnik je kvadrat duljine vektora *e′*. (Upravo taj kvadrat nam poništava korijen iz definicije duljine vektora.)

2. Vitopere pravčaste plohe

Ravnina

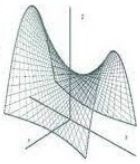
Ravnina je jedan primjer pravčaste plohe koja nije vitopera, ali malim promjenama u njenoj konstrukciji možemo dobiti vitopere pravčaste plohe. Svaka izvodnica samo se translatirala po pravcu da bi se poklopila sa sebi neizmjerno blizom izvodnicom i to vrijedi za svaku izvodnicu ravnine. (Da smo konstantno rotirali izvodnicu dobili bi helikoid.)

Svaka izvodnica ravnine nastala je isključivo svojom translacijom po jednom fiksnom pravcu (crveno istaknutom na slici) u prostoru zadržavajući fiksni kut, drugim riječima bez bilo kakve rotacije zato i nije vitopera. Svi pravci jedne familije izvodnica su međusobno paralelni.



Imamo beskonačno mnogo familija pravaca na toj plohi jer kroz jednu točku ravnine prolazi beskonačno mnogo pravaca (sadržanih u toj ravnini), a svaki pravac taj ima beskonačno mnogo sebi paralelnih pravaca.

Ako se želimo riješiti uvjeta: bez rotacije tada dva različita paralelna pravca u prostoru proglasimo za ravnalice, na svakom odaberemo po jednu točku. Kroz te dvije točke provučemo prvu izvodnicu i paralelno njoj nižemo sve preostale izvodnice po tim ravnalicama. (Kada bi dvije odabrane ravnalice bile samo momoilazne u prostoru nizanjem izvodnica dobili bi matematičko sedlo, to jest hiperbolički paraboloid što je vitopera pravčasta ploha čija je parametrizacija *q(u:v) = (au; 0; u2) + v(a; b; 2u)*: i iznos vitoperosti je $\frac{2\sqrt{2}ab}{2}$.)



Jednadžba ravnine u prostoru je :

$$ax+by+cz=d$$

iz čega slijedi:

$$cz=d-ax-by$$

Ako dobivenu jednadžbu podijelimo sa c i još radi jednostavnosti d izjednačimo s nulom (to smo učinili bez smanjenja općenitosti, jer još uvijek je to jednadžba ravnine). Zatim parametar z proglasimo kao funkciju dviju varijabli u i v, od kojih je u prijašnja varijabla x, a v prijašnja varijabla y. Odnosno:

$$q(u,v) = -\frac{a}{c}u - \frac{b}{c}v$$

Još samo dobiveni izraz zapišemo sličnije traženom obliku (prva komponenta vektora je slobodna varijabla u, druga komponenta vektora je slobodna varijabla v, a treća ono što smo upravo dobili):

$$q(u,v) = (u, v, -\frac{a}{c}u - \frac{b}{c}v)$$

Iz čega slijedi parametrizacija ravnine kao pravčaste plohe :

$$q(u,v) = (u, 0, -\frac{a}{c}u) + v\ \ (0, 1, \ -\frac{b}{c})$$

Naravno, ovo nije jedinstvena parametrizacija. Ako izračunamo vitoperost po formuli dobit ćemo nulu kao rješenje bez obzira koju parametrizaciju ravnine kao pravčaste plohe (to jest oblika $q(u,v)=c(u)+v\ e(u)$) upotrijebili jer je vitoperost dobro definirani pojam (što znači da ne ovisi o parametrizaciji, ali računamo ju isključivo iz oblika $q(u,v)=c(u)+v\ e(u)$).

Za svaku (vitoperu) pravčastu plohu vrijedi da njen presjek s bilo kojom njenom tangencijalnom ravninom je barem jedan pravac (to je još jedan način provjere je li ploha zadana formulom pravčasta). Ni ravnina nije iznimka jer je njena tangencijalna ravnina ona sama. Znači: da njen presjek s njenom tangencijalnom ravninom je skup od beskonačno mnogo pravaca. Ako postoje još neke vitopere pravčaste plohe s tim svojstvom to samo znači da one po dijelovima nisu vitopere.

Jednoplošni hiperboloid

Jednoplošni hiperboloid je primjer vitopere pravčaste plohe konstantne vitoperosti. Svaka izvodnica plohe samo se translatirala po kružnici da bi se poklopila sa sebi neizmjerno blizom izvodnicom uz uvjet da postoji ravnina s kojom svaka od izvodnica zatvara jedan te isti kut (i to vrijedi za svaku izvodnicu plohe). (Ako je taj kut pravi kut tako dobivena ploha je ravnina bez kruga radijusa jednakim udaljenosti izvodnice od osi rotacije. Ako je taj kut ispruženi kut tako dobivena ploha je cilindar (ploha beskonačnog valjka). Ukoliko izvodnica koju rotiramo ima zajedničku točku s osi rotacije dobivena ploha je konus (ploha beskonačnog stošca) kojemu samo jedna točka nije regularna. (Os rotacije je pravac okomit na ravninu razapetu ravnalicom kružnicom u središtu te kružnice.) Samo je hiperboloid vitopera ploha.)



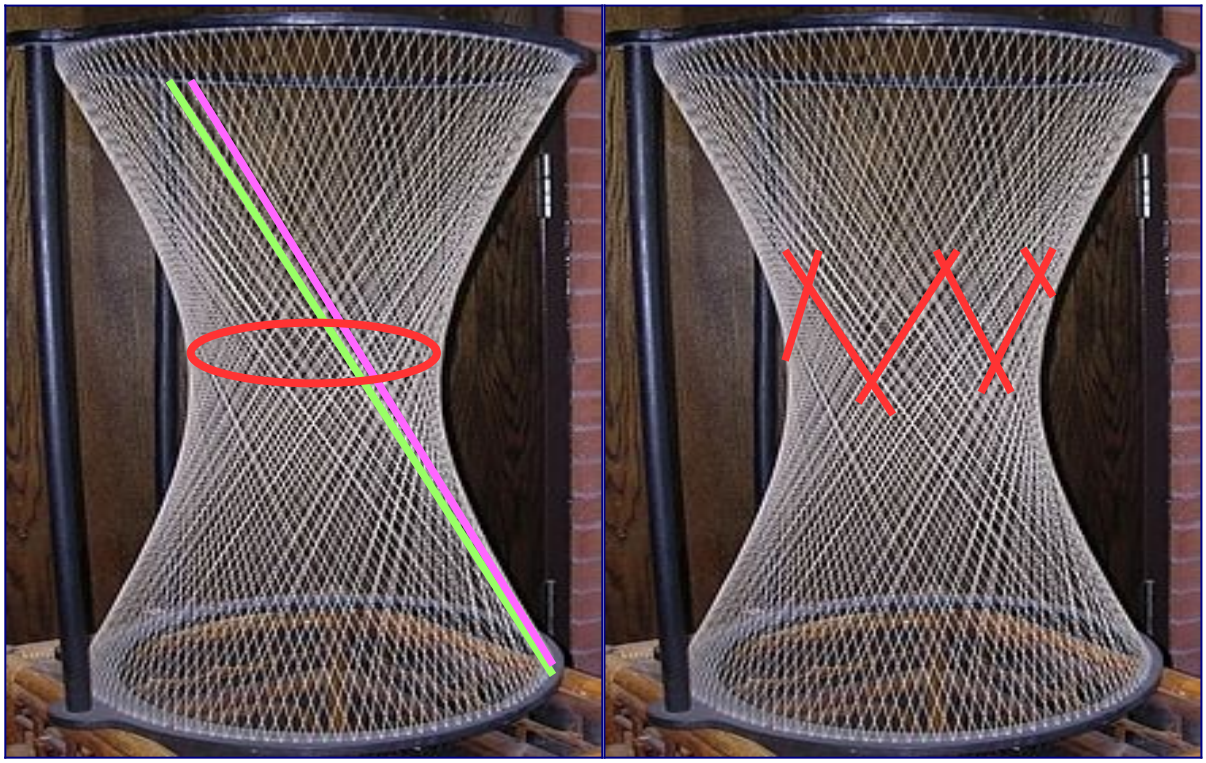


Da bismo izbjegli druge pravčaste plohe (koje u ovom slučaju nisu ni vitopere) odaberemo pravac os rotacije i paralelnu mu ravninu koja ga ne sadrži. Na toj ravnini odaberemo prvu izvodnicu izbjegavajući da ona zatvara pravi ili ispruženi kut s osi. Zarotiramo izvodnicu u odnosu na os rotacije. Udaljenost ravnine od osi rotacije (je isto što i udaljenost izvodnice od osi rotacije) je radijus bazne krivulje (kružnica crveno istaknuta). Odabirom udaljenosti i kuta izvodnice konstrukcijski su pokriveni svi jednoplošni rotacijski hiperboloidi koji postoje.

Jedna moguća parametrizacija jednoplošnog hiperboloida kao pravčaste plohe je:

$$q(u; v) = (a \cos u; a \sin u; 0) + v(-a \sin u; a \cos u; c)$$

Za razliku od ravnine, ovdje uvijek trebamo prijeći na polarne koordinate kako bismo uspjeli dobiti traženu parametrizaciju, (analogno uočimo li izraz x^2+y^2 u jednadžbi).



Za razliku od ravnine, ni jedne dvije neizmjerno blize izvodnice iste familije nisu paralelne. (To vrijedi za svaku vitoperu plohu.) Imamo dvije familije pravaca na toj plohi. Kroz svaku točku plohe prolaze dva pravca iz dvije različite familije pravaca. (Pravci iste familije nemaju zajedničkih

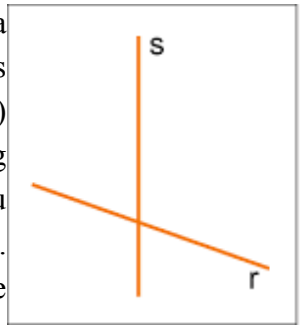
točaka jer je vitoperost definirana samo za regularne točke plohe.) Znamo da ako je vitoperost jedne točke vitopere pravčaste plohe određenog iznosa onda svaka druga točka tog istog pravca ima taj isti iznos vitoperosti. Možemo okružiti jednoplošni hiperboloid cik-cak krivuljom. I bez računanja vitoperosti po formuli zaključujemo da je vitoperost svake točke jednoplošnog hiperboloida ista (ne ovisi o parametru u) i to je konstanta c .

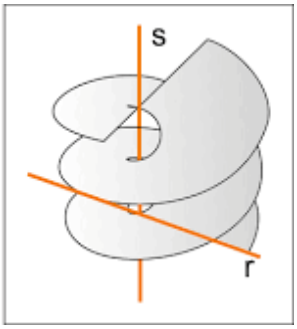
Uočimo: u prvom načinu konstrukcije (bez paralelne ravnine) mogli smo bilo koju kružnicu smatrati baznom krivuljom. Svaka kružnica jednog te istog hiperboloida mogla je poslužiti kao ravnalica, ali ako provučemo okomit pravac izmedu svake dvije neizmjerno blize izvodnice i ponovimo postupak prethodno opisan (prije formule vitoperosti) dobit ćemo upravo crveno istaknutu kružnicu za baznu krivulju. To vrijedi za obje familije izvodnica. Ravnina paralelna s osi rotacije poslužila je samo tome da odmah znamo radijus bazne krivulje (kojeg bismo dobili da izračunamo udaljenost između osi i (prve) izvodnice).

Cilindar nema neku posebno istaknutu kružnicu na sebi jer sve su istog radijusa, dok konus ima istaknutu jednu točku (jedinu u kojoj ploha nije regularna). Možemo reći da je ona ravnalica, (preciznije trivijalna bazna krivulja) jer upravo u njoj izvodnice stalno mijenjaju smjer (odnosno da ponovimo postupak opisan par redaka prije formule vitoperosti dobivamo samo tu točku), ali cijela ploha spada, kao i cilindar, pod cilindrične plohe stoga konus nije vitopera ploha.

Helikoid

Helikoid nastaje puštanjem pravaca da neprekidno i jednolično klizi uz rotaciju (s fiksnim kutom) duž jednog čvrstog (uspravnog) pravca. Za razliku od ravnine i jednoplošnog hiperboloida ova ploha ima samo jednu familiju izvodnica kao i većina vitoperih pravčastih ploha. Postoji ravnina s kojom je svaka izvodnica plohe paralelna.

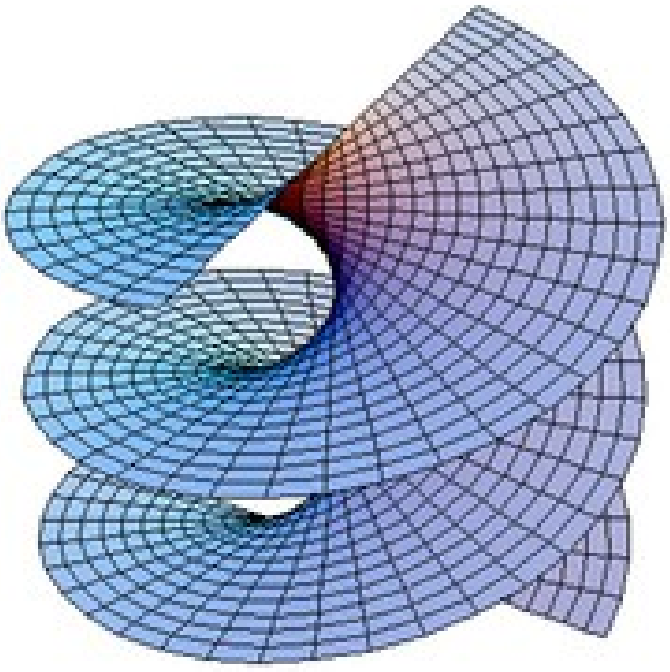




Još jedan način konstrukcije helikoida je: uzmimo jedan čvrsti pravac i cilindričnu spiralu oko njega (tako da je svaka točka spirale jednako udaljena od pravca). Helikoid je skup svih pravaca koji prolaze kroz (sijeku) spiralu i jedan fiksni pravac s kojim zatvaraju pravi kut.

Parametrizacija helikoida je:

$$q(u, v) = (0, 0, bu) + v(\cos u, \sin u, 0).$$



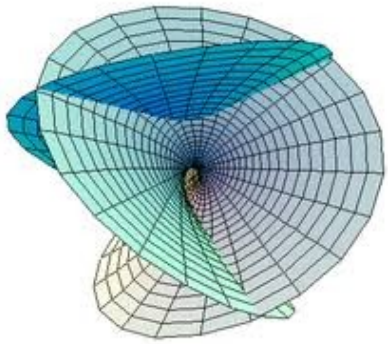
Iznos vitoperosti je konstanta b (ne ovisi o varijabli u).

Iz same konstrukcije očito je kako je pravac S (to jest pravac okomit na svaku izvodnicu) bazna krivulja helikoida.

Vitopere pravčaste plohe složenije vitoperosti

Do sada obrađene su vitopere pravčaste plohe čiju vitoperost ne smatramo složenom funkcijom parametara u. Međutim, većina vitoperih pravčastih ploha je funkcija koja ne mora nužno biti jednostavna. Lakše je napisati parametrizaciju takve plohe i izračunati vitoperost nego ju konstruirati, zamisliti ili nacrtati. (Proizvoljno odaberemo funkcije od u kojima popunimo mjesta c_i i e_i za i=1, 2, 3 izraza $q(u,v)=(c_1, c_2, c_3)+v\ (e_1, e_2, e_3)$ koji predstavlja parametrizaciju vitopere pravčaste plohe.)

Promotrimo sljedeću plohu:



Uočimo da imamo mnoge neregularne točke, preciznije cijelu hiperbolu takvih točaka.

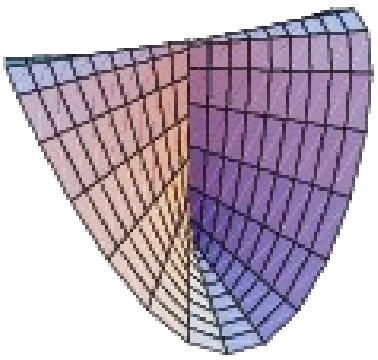
Da želimo izvesti njezinu parametrizaciju trebali bi ili uočiti neku njezinu istaknutiju ravnalicu i pravilo nizanja izvodnica ili jednostavno znati njezinu formulu pa varijablu z izraziti preko x i y i nadalje sprovesti isti postupak kao što je napravljeno za ravninu u drugom poglavlju (ako je to nemoguće tada pokušati prvo s polarnom parametrizacijom...) U ovom slučaju očekujemo složeniju funkciju vitoperosti.

Jedan od zanimljivih primjera je Plückerov konoid (jer očekujemo složeniju vitoperost). Za njega vrijedi sve isto kao i za bilo koji drugi konoid, to jest, postoji ravnina s kojom je svaka izvodnica plohe paralelna. (Helikoid je primjer konoida.) Njegova formula je:

$$z=\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

0dnosno:

$$ax^2+b\,y^2-z\,x^2-y^2\,z=0$$



Prijeđemo u polarne koordinate (promatramo prvu jednadžbu) i nakon cijelog postupka dobivamo parametrizaciju (kao vitopere pravčaste plohe) :

$q(u,v) = (0, 0, 2\ cosu\ sinu\ ) + v\ \ (cosu, sinu, 0)$

Iznos vitoperosti je dva što je konstanta, ne ovisi o varijabli *u*. Bazna krivulja je dužina.

Ako želimo konstruirati pravčastu plohu koja za vitoperost ima funkciju koja ovisi o u možemo modelirati plohe jednostavnije vitoperosti.

Helikoid ima pravac za ravnalicu. Iskrivimo ga u neku krivulju (netrivijalne zakrivljenosti nepravilniju od kružnice) i ponovimo isti postopak (konstantni kut, ...). Naravno, to više nije helikoid nego tražena ploha. Ukoliko želimo zadržati pravac kao ravnalicu tada samo imamo nekonstantne zaokretaje izvodnice. To pravilo možemo zamijeniti nepravilnom cilindričnom spiralom i definirati nepravilni helikoid kao skup svih pravaca koji prolaze kroz (sijeku) nepravilnu spiralu i jedan fiksni pravac s kojim zatvaraju pravi kut.

Po uzoru na matematičko sedlo ponovimo postupak, ali umjesto dva mimoilazna pravca uzmimo dvije različite (nepravilne) sinusoide (sadržane u dvije različite paralelne ravnine, to jest kojima su bivše ravnalice restrikcija). Time smo spriječili da ploha ima dvije familije izvodnica što je nužan, ali ne i dovoljan uvjet složenije vitoperosti. Nepravilnost barem jedne sinusoide garantira nam složeniju vitoperost.

Promotrimo konstrukciju jednoplošnog hiperboloida, ali sprovedimo nepravilnu rotaciju, (samo onu ravninu iz konstrukcije potpuno proizvoljno udaljavamo i približavamo za vrijeme rotacije tako da je ona i dalje paralelna s osi rotacije) to jest neka ravnalica bude potpuno nepravilna zatvorena krivulja. Time smo spriječili da ploha ima dvije familije izvodnica. Njezina vitoperost više ne može biti konstanta.

3. Zaključak:

O Vitoperosti:

Svim pravčastim plohama možemo izračunati vitoperost (bile one vitopere ili ne). Ako su svake dvije neizmjerno blize izvodnice paralelne ploha je cilindar, znači nije vitopera. Vitoperost joj je nula. Analogno vrijedi za konusne plohe. (Primjeri mogućih parametrizacija su:

konus drugog reda: *(0,0,0) + v (a cos u, b sin u, c u)*

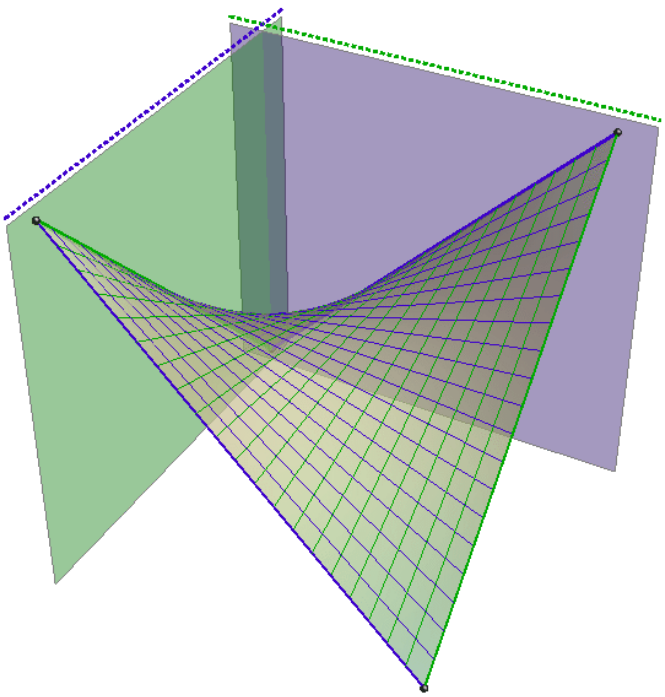
hiperbolički cilindar: *(a ch u, b ch u, 0) + v (0, 0, 1)*

parabolički cilindar: $\left(\frac{1}{2p}u^2, u, 0\right) + v\ (0, 0, 1)$

izračunamo li vitoperost po formuli dobivamo nulu.)

Promotrimo li helikoid, jednoplošni rotacijski hiperboloid i matematičko sedlo (analogno vrijedi za sve rotacijske cilindrične plohe i ravninu) uočit ćemo sljedeće: odaberimo bilo koje različite izvodnice (blize, ali ne neizmjerno blize). Odrežimo plohu po njima. Odrezani dio plohe savršeno se poklapa svugdje po plohi (naravno, nakon što poklopimo rub reza s nanovo odabranom izvodnicom). Time možemo zaključiti da je vitoperost takve plohe konstanta, ali ukoliko to ne vrijedi ne možemo zaključiti da je vitoperost složenija. Plückerov konoid je dokaz toga, kao i općeniti jednoplošni hiperboloid. Vitoperost je složenija ukoliko taj odrezani dio ne možemo savršeno poklopiti bilo gdje drugdje na plohi. To mora vrijediti za svaki odrezani dio plohe. Znači: niti jedan dio plohe više nije isti, niti jedan uzorak plohe se ne ponavlja. (Naravno: stalno mora vrijediti da svake dvije neizmjerno blize izvodnice nisu paralelne.)

Za matematičko sedlo možemo reći da svaku izvodnicu ravnine možemo smatrati ravnalicom, međutim tada postoji problem definiranja pravila nizanja izvodnica takvog da čine sedlo, to jest takvih da postoji još jedna familija izvodnica gdje za obje mora vrijediti sljedeće: Svaka familija izvodnica ima svoju ravninu s kojom je paralelna svaka izvodnica te familije. Zato plohu smatramo konoidom. (Presjek plohe s bilo kojom tangencijalnom ravninom je skup od dva pravca.)



Ponovimo li postupak otkrivanja bazne krivulje, to jest: povučemo li jedinstveni pravac okomit na svake dvije (mimoilazne) neizmjerno blize izvodnice, istaknemo neizmjerno malu dužinu između njih dobivenu presjecima tog okomitog pravca uočit ćemo da je hiperbola bazna krivulja sedla. (Istu hiperbolu dobili bi ponavljajući postupak i na drugoj familiji izvodnica.)

Jedna općenitija parametrizacija sedla je:

$$q(u; v) = (au; 0; u^2) + v(1; b; 2u)$$

uvrstimo v=0 dobivamo upravo parametrizaciju bazne krivulje matematičkog sedla. Kako parametrizacija nije jedinstvena, tako ni parametrizacija bazne krivulje matematičkog sedla ili bilo koje druge vitopere plohe ne mora biti ista, ali svejedno radi se o istoj baznoj krivulji, jer je pravac okomit na dvije mimoilazne ravnalice jedinstven. (Izračunamo li vitoperost po formuli dobit ćemo $\frac{2\sqrt{2}ab}{2}$. Očekivali smo konstantu jer hipar ima dvije familije izvodnica.)

Vitopere pravčaste plohe koje su konoidi pretežno su jednostavnije vitoperosti. Ako znamo da im je ravnalica pravac i da su im sve točke regularne i pravilo nizanja izvodnica jednostavnije tada ćemo s velikom vjerojatnošću biti u pravu ako tvrdimo da im je vitoperost konstantna funkcija. Ukoliko znamo da promatrana vitopera pravčasta ploha imala više od jedne familije izvodnica tada joj je sigurno vitoperost konstantna funkcija. Ako pravčasta ploha ima nulu kao iznos vitoperosti, tada ona nije vitopera.

Ploha koja ima beskonačno mnogo familija izvodnica je ravnina. (Ako naiđemo na još neke vitopere pravčaste plohe s tim svojstvom to samo znači da su one po dijelovima ravnine.) Vitopere pravčaste plohe s točno tri familije izvodnica ne postoje, mogu imati samo jednu ili dvije.

Ako želimo konstruirati pravčastu plohu koja za vitoperost ima funkciju koja ovisi o varijabli u možemo modelirajući plohe jednostavnije vitoperosti čiju parametrizaciju znamo samo trebamo promijeniti *e(u)* u zapisu: $q(u,v)=c(u)+v\ e(u)$ gdje su *u* i *v* realni parametri, jer je *c(u)* bazna krivulja, odnosno istaknuta ravnalica. (Pravčasta ploha koja za vitoperost ima funkciju koja ovisi o varijabli u sigurno ima samo jednu familiju izvodnica.) To je jedan od načina, drugi je zakomplicirati uvjet ili način konstrukcije.

Vitopere pravčaste plohe imaju najpoznatiju i najrašireniju primjenu u građevinarstvu. Najčešće su upravo one jednostavnije vitoperosti, ali ne možemo ne spomenuti ravninu radi svoje zastupljenosti.

Ravnina:

Gotovo da nema građevine koja ne sadrži pravčastu plohu trivijalne vitoperosti. Zidovi su ravni kao i podovi, (stolovi, namještaj, stakla prozora, korice knjiga...) što znači da je ravnina osjetno svuda oko nas.



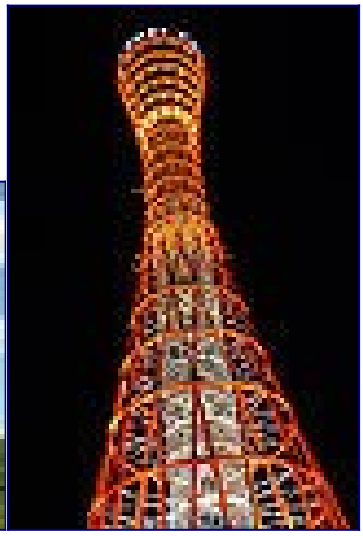


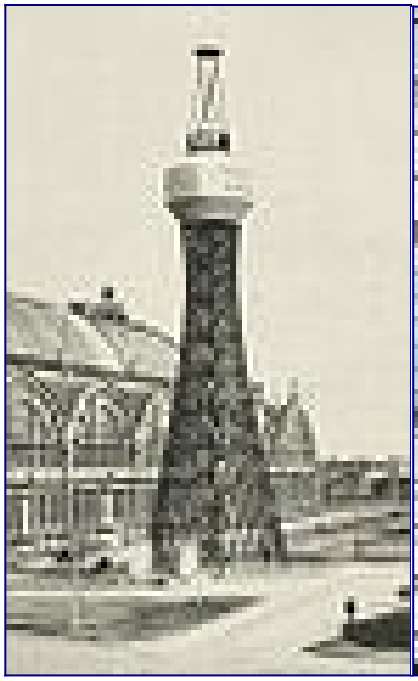
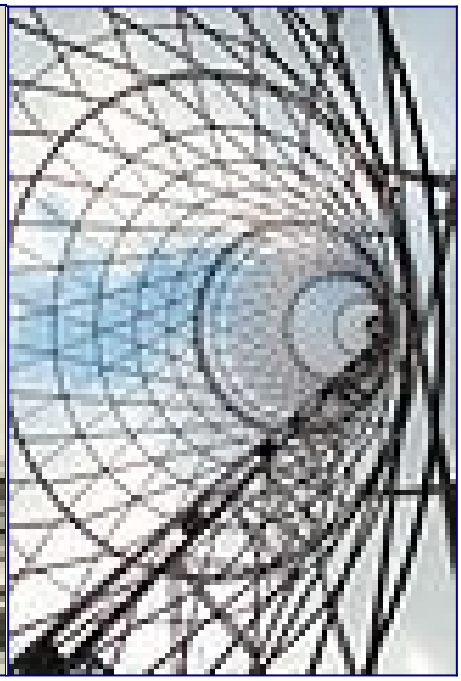


Jednoplošni hiperboloid:

Mnogo raznolikih tornjeva građeno je po uzoru na hiperboloid (U svakodnevnom životu možemo ga prepoznati u obliku stalka tegle za cvijeće ili košare za rublje.)

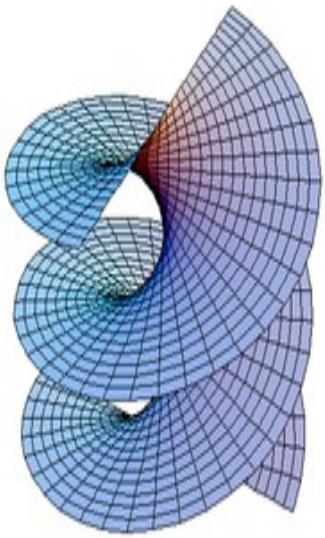


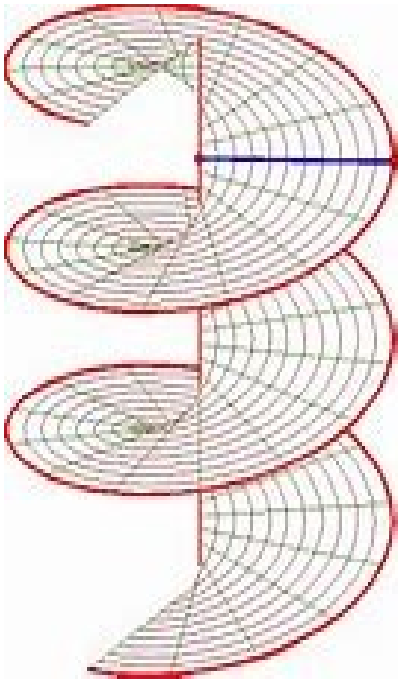


Helikoid:

Najpoznatiji primjer helikoida su kružne stepenice. Uočimo ovdje je ključan dio helikoida ("pola" helikoida). Od pete stepenice na dalje građevina je građena po uzoru na plohu dobivenu nanosom polupravca (a ne cijelog pravca) na jedan čvrsti uspravni pravac prostora.







4. Literatura:

1. Wikipedia (mjesto preuzimanja skoro svih slika)
2. http://www.enciklopedija.hr
3. Ž. Milin Šipuš, Geometrija ploha, Skripta, PMF, Zagreb
4. Ž. Milin Šipuš, Uvod u diferencijalnu geometriju, Skripta, PMF, Zagreb
5. J. Perić, Geometrija u graditeljstvu, diplomski rad, PMF Zagreb, rujan 2015.

5. Sažetak

Kratak opis seminarskog rada:

Obrađeni su pojmovi definicija i značenje vitoperosti (u prvom poglavlju), te njezina manifestacija na pojedinim primjerima istaknutijih vitoperih pravčastih ploha počevši od pravčaste plohe trivijalne vitoperosti, pa sve do opisa konstrukcija vitoperih pravčastih ploha složenije vitoperosti (u drugom poglavlju).

Pobliži opis seminarskog rada:

Rad je namijenjen svima koji nisu detaljno upoznati s vitoperim plohama ili ih nisu promatrali kao takve. Izbjegnuti su svi izrazi (poput: infinitezimalni pomak, beskonačno daleka ravnalica...) koji nepotrebno narušavaju jednostavnost intuitivnog shvaćanja pravčastih i vitoperih pravčastih ploha. Obrađeno je prepoznavanje (vitoperih) pravčastih ploha iz samog zapisa te plohe (ako je ploha pravčasta možemo ju zapisati na sljedeći način u protivnom to nije moguće). Nizani su primjeri ploha od trivijalne do složenije vitoperosti s nakanom poticanja intuicije (moći prepoznati koja ploha ima složeniju vitoperost ili koja je ‚uopće, vitopera).

Iz činjenice da vitoperost u jednoj točki ima isti iznos kao i u svim ostalim točkama tog istog pravca vizualizirat će se činjenica da je vitoperost vitopere pravčaste plohe koja ima dvije familije izvodnica konstanta, to jest da je jednaka u svakoj svojoj točki. Odabran je primjer jednoplošnog rotacionog hiperboloida u tu svrhu. Time je zaobiđena činjenica da svaka izvodnica jedne familije jednoplošnog rotacionog hiperboloida siječe sve ostale izvodnice iz druge familije (beskonačnost je intuitivno zahtjevan pojam, ovako je zaobiđen bez posljedica).