

1	2	3	4	5	Σ

MATIČNI BROJ

IME I PREZIME

Projektivna geometrija - drugi kolokvij, 30.1.2026.

1. (7 bodova) Definirajte oval i nedegeneriranu koniku u projektivnoj ravni $\text{PG}(2, F)$. Dokažite da je svaka neprazna nedegenerirana konika oval. Pokažite primjerom da obrat ne vrijedi (npr. za $F = \mathbb{R}$).

2. (7 bodova) Konika $\mathcal{C}$ u projektivnoj ravnini $\text{PG}(2, F)$ zadana je jednačbom

$$f(x_0, x_1, x_2) = x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2.$$

Dokažite da je $\mathcal{C}$ nedegenerirana i odredite homogene koordinate tangenata u točkama $A = (1 : 0 : 0)$, $B = (0 : 1 : 0)$ i $C = (0 : 0 : 1)$. Ako je polje F karakteristike 2, odredite homogene koordinate nukleusa od $\mathcal{C}$.

3. (6 bodova) Definirajte kvadriku $\mathcal{Q}$ u projektivnom prostoru $\text{PG}(n, F)$, tangencijalni prostor u točki $P \in \mathcal{Q}$ i radikal kvadrike $\mathcal{Q}$. Dokažite da je radikal potprostor od $\text{PG}(n, F)$.

4. (6 bodova) Definirajte kvadratni skup $\mathcal{Q}$ u apstraktnom projektivnom prostoru $\mathcal{P}$, tangencijalni prostor u točki $P \in \mathcal{Q}$ i radikal kvadratnog skupa $\mathcal{Q}$. Dokažite da je radikal potprostor od $\mathcal{P}$.

5. (3+2+2+2 bodova) Kvadrika $\mathcal{Q}$ u $\text{PG}(4, \mathbb{R})$ zadana je jednačbom

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = x_0^2 - x_1^2 + x_2x_3 + x_3x_4 = 0.$$

- (a) Za $P = (0 : 0 : 0 : 0 : 1)$, odredite homogene koordinate tangencijalnog prostora $\mathcal{Q}_P$ i opišite presjek $\mathcal{Q}_P \cap \mathcal{Q}$.

- (b) Odredite radikal od $\mathcal{Q}$.

- (c) Pokažite da je $\mathcal{Q}$ konus nad nedegeneriranom kvadrikom $\mathcal{Q}' \subseteq \mathcal{H}$ za neku hiperravninu $\mathcal{H} \subseteq \text{PG}(4, \mathbb{R})$.

- (d) Je li $\mathcal{Q}'$ elipsoid ili hiperboloid? Kojeg su indeksa $\mathcal{Q}'$ i $\mathcal{Q}$?

Na kolokviju je dozvoljeno koristiti pribor za pisanje i kalkulator.

Vedran Krčadinac