

Projektivna geometrija 2025./26., pitanja za drugi kolokvij

Definicije ovala, konike, kvadrike, hiperboloida, elipsoida, kvadratnog skupa, ovoida i povezanih pojmova (tangenta, sekanta, pasanta, tangencijalni prostor, singularna točka, (ne)degeneriranost, radikal, indeks...).

Teorem (Qvist). [Teorem 5.4.6 na str. 201 knjige] Neka je $\mathcal{O}$ oval u konačnoj projektivnoj ravнини parnog reda. Onda postoji točka $N \notin \mathcal{O}$ (*nukleus*) kroz koju prolaze sve tangente na $\mathcal{O}$.

Teorem 4. Svaka nedegenerirana neprazna konika u $\text{PG}(2, F)$ je oval.

Teorem 10. [Teorem 4.3.1 na str. 144 knjige] Svaka nedegenerirana konika u $\text{PG}(2, F)$ je oval ili prazan skup, a svaka degenerirana konika je cijela ravnina, unija dvaju pravaca, pravac ili točka.

Propozicija 1. [Lema 4.7.2 na str. 163 knjige] Za kvadriku $\mathcal{Q}$ i pravac ℓ u $\text{PG}(n, F)$ vrijedi $\ell \subseteq \mathcal{Q}$ ili $|\ell \cap \mathcal{Q}| \in \{0, 1, 2\}$.

Teorem 5. [Lema 4.7.3 na str. 163 knjige] Tangencijalni prostor $\mathcal{Q}_P$ kvadrike $\mathcal{Q}$ je unija svih pravaca kroz P koji su tangente ili su $\mathcal{Q}$ -pravci.

Propozicija. Radikal kvadrike / kvadratnog skupa je potprostor.

Dva dokaza: “algebarski” i “sintetički” [Teorem 4.1.2 (a) na str. 139 knjige].

Teorem 5. [Teorem 4.1.2 (b) i (c) na str. 139 knjige] Svaki degenerirani kvadratni skup $\mathcal{Q}$ je potprostor ili konus s vrhom rad $\mathcal{Q}$ i bazom $\mathcal{Q}' = \mathcal{Q} \cap \mathcal{R}$, gdje je $\mathcal{R}$ bilo koji direktni komplement od rad $\mathcal{Q}$, a $\mathcal{Q}'$ je pritom nedegenerirani kvadratni skup u $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{Q} = \bigcup_{\substack{A \in \text{rad } \mathcal{Q} \\ B \in \mathcal{Q}'}} AB$$