

Projektivna geometrija 2025./26., pitanja za prvi kolokvij

Aksiomi projektivne ravnine i afine ravnine.

Teorem 1. Svaka afina ravnina $\mathcal{A}$ može se proširiti “pravcem u beskonačnosti” do projektivne ravnine $\mathcal{P}$. Obrnuto, ako je $\mathcal{P}$ projektivna ravnina i ℓ_∞ bilo koji njezin pravac, onda je $\mathcal{A} = \mathcal{P} \setminus \ell_\infty$ afina ravnina.

Model projektivnog prostora $\text{PG}(n, F)$.

Propozicija 2 (Menelaj i Ceva). Neka su $A = \langle a \rangle$, $B = \langle b \rangle$, $C = \langle c \rangle$ nekolinearne točke u $\text{PG}(n, F)$ i $P = \langle b + \alpha c \rangle$, $Q = \langle c + \beta a \rangle$, $R = \langle a + \gamma b \rangle$ točke na pravcima BC , AC , AB (redom). Točke P , Q , R su kolinearne ako i samo ako je $\alpha\beta\gamma = -1$. Pravci AP , BQ , CR su kopunktalni ako i samo ako je $\alpha\beta\gamma = 1$.

Teorem 3 (Fano). Polje F je karakteristike 2 ako i samo ako u projektivnoj ravni $\text{PG}(2, F)$ za svaki četverovrh $A_1A_2A_3A_4$ vrijedi da su točke $P = A_1A_4 \cap A_2A_3$, $Q = A_2A_4 \cap A_1A_3$ i $R = A_3A_4 \cap A_1A_2$ kolinearne.

Lema 4. [Lema 2.4.1 u knjizi] Za svaka dva mimoilazna pravca ℓ_1 , ℓ_2 u $\text{PG}(3, F)$ i točku $T \notin \ell_1 \cup \ell_2$, postoji točno jedna transversala od $\{\ell_1, \ell_2\}$ kroz T .

Propozicija 5 (Veblen-Young). [Teorem 2.1.1 u knjizi, provjera aksioma 2] Neka su A , B , C i D četiri točke u $\text{PG}(n, F)$. Ako pravac AB siječe pravac CD , onda pravac AC siječe pravac BD .

Teorem 6 (Desargues). [Teorem 2.2.1 u knjizi] Neka su A_1 , A_2 , A_3 , B_1 , B_2 , B_3 i C točke u $\text{PG}(n, F)$ takve da nikoje tri od točaka A_1 , A_2 , A_3 , C niti od B_1 , B_2 , B_3 , C nisu kolinearne, a točke A_i , B_i , C su kolinearne, za $i = 1, 2, 3$. Tada su točke $P = A_1A_2 \cap B_1B_2$, $Q = A_2A_3 \cap B_2B_3$ i $R = A_3A_1 \cap B_3B_1$ kolinearne.

Aksiomi apstraktnog projektivnog prostora $\mathcal{P}$. Definicija potprostora od $\mathcal{P}$ i potprostora $\langle \mathcal{S} \rangle$ generiranog skupom točaka $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}$.

Teorem 7. [Teorem 1.3.1 u knjizi] Ako je $\mathcal{R}$ potprostor i $T \notin \mathcal{R}$ točka, onda je

$$\langle \mathcal{R} \cup \{T\} \rangle = \bigcup_{R \in \mathcal{R}} [TR].$$