

## Domaća zadaća 9

1. Kvadrike  $\mathcal{Q}_1$ ,  $\mathcal{Q}_2$  i  $\mathcal{Q}_3$  u  $\text{PG}(3, \mathbb{R})$  zadane su kvadratnim formama

$$f_1(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

$$f_2(x_0, x_1, x_3, x_4) = x_0x_3 - x_1^2 - x_2^2$$

$$f_3(x_0, x_1, x_3, x_4) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$$

Odredite njihove presjeke s “ravninom u beskonačnosti”  $x_0 = 0$  i pokažite da su projektivno ekvivalentne.

2. Kvadrike  $\mathcal{Q}_1$ ,  $\mathcal{Q}_2$  i  $\mathcal{Q}_3$  u  $\text{PG}(3, \mathbb{C})$  zadane su kvadratnim formama

$$f_1(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

$$f_2(x_0, x_1, x_3, x_4) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$f_3(x_0, x_1, x_3, x_4) = x_0x_3 - x_1x_2$$

Pokažite da su nedegenerirane i projektivno ekvivalentne. Kojeg su tipa te tri kvadrike (elipsoid, prazan skup ili hiperboloid)?

3. Neka je  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  kvadratni funkcional zadan s  $f(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0^2 + x_0x_1 + x_2x_3$  u kanononskoj bazi od  $\mathbb{R}^4$  te  $\mathcal{Q}$  odgovarajuća kvadrika u projektivnom prostoru  $\text{PG}(3, \mathbb{R})$ . Odredite matricu bilinearnog funkcionala  $B_f$  u kanononskoj bazi i dokažite da je kvadrika  $\mathcal{Q}$  nedegenerirana. Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine  $\mathcal{Q}_T$  u točki  $T = (0 : 1 : 0 : 0)$  i njezin presjek s  $\mathcal{Q}$ . Je li  $\mathcal{Q}$  elipsoid ili hiperboloid?
4. Isti zadatak za  $f(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0^2 + 2x_0x_1 + x_2^2 + x_3^2$ ,  $T = (1 : -1 : 1 : 0)$ .