

Domaća zadaća 8

1. Neka bilinearni funkcional $B : V \times V \rightarrow F$ u bazi $\{e_0, \dots, e_n\}$ ima matricu $B \in M_{n+1}(F)$, a u bazi $\{e'_0, \dots, e'_n\}$ matricu $B' \in M_{n+1}(F)$. Dokažite da su B i B' kongruentne matrice: $B' = T^T \cdot B \cdot T$, gdje je $T = [t_{ij}] \in M_{n+1}(F)$ matrica prijelaza, tj. $e'_j = \sum_{i=0}^n t_{ij} e_i$. Dokažite da kongruentne matrice imaju isti rang.
2. Za bilinearni funkcional $B : V \times V \rightarrow F$ kažemo da je *simetričan* ako vrijedi $B(x, y) = B(y, x)$, a *antisimetričan* ako vrijedi $B(x, y) = -B(y, x)$, $\forall x, y \in V$. Dokažite:
 - (a) Funkcional B je simetričan ako i samo ako u nekoj (ili u svakoj) bazi ima simetričnu matricu.
 - (b) Funkcional B je antisimetričan ako i samo ako u nekoj (ili u svakoj) bazi ima antisimetričnu matricu.
 - (c) Ako je karakteristika polja $\text{char } F \neq 2$, funkcional B je antisimetričan ako i samo ako vrijedi $B(x, x) = 0$, $\forall x \in V$.
3. Neka je $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ kvadratni funkcional zadan s $f(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0^2 + x_0 x_1 + x_2 x_3$ u kanononskoj bazi od $\mathbb{R}^4$ te $\mathcal{Q}$ odgovarajuća kvadrika u projektivnom prostoru $PG(3, \mathbb{R})$. Odredite matricu bilinearnog funkcionala B_f u kanononskoj bazi i dokažite da je kvadrika $\mathcal{Q}$ nedegenerirana. Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine $\mathcal{Q}_T$ u točki $T = (0 : 1 : 0 : 0)$ i njezin presjek s $\mathcal{Q}$. Je li $\mathcal{Q}$ hiperboloid ili elipsoid?
4. Isti zadatak za $f(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0^2 + 2x_0 x_1 + x_2^2 + x_3^2$, $T = (1 : -1 : 1 : 0)$.