

Domaća zadaća 5

1. U $\text{PG}(3, \mathbb{R})$ zadani su pravci $\ell_1 = \langle (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1) \rangle$, $\ell_2 = \langle (1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1) \rangle$ i točka $T = (1 : 0 : 0 : 1)$. Odredite transversalu od $\{\ell_1, \ell_2\}$ koja prolazi kroz T .
2. Za $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, zadani su pravci u $\text{PG}(3, \mathbb{R})$:

$$\ell_{\alpha, \beta} = \langle (\alpha, \beta, 1, 0), (-\beta, \alpha, 0, 1) \rangle,$$

$$\ell_{\infty} = \langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0) \rangle.$$

Dokažite da je familija pravaca $\mathcal{S} = \{\ell_{\infty}\} \cup \{\ell_{\alpha, \beta} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ “spread” u $\text{PG}(3, \mathbb{R})$, tj. da su svaka dva pravca iz $\mathcal{S}$ mimoilazna i svaka točka u $\text{PG}(3, \mathbb{R})$ leži na nekom pravcu iz $\mathcal{S}$.

3. Dokažite obrat Desarguesova teorema: ako su dva trovrha osno perspektivni, onda su i centralno perspektivni.
4. Precizno definirajte *kombinatoričku* (v_k) konfiguraciju i *geometrijsku* (v_k) konfiguraciju.
5. Ako postoji kombinatorička (v_k) konfiguracija, dokažite da vrijedi nejednakost $v \geq k^2 - k + 1$. Nadalje, dokažite da jednakost $v = k^2 - k + 1$ vrijedi ako i samo ako je riječ o konačnoj projektivnoj ravnini reda $k - 1$.
6. Kombinatorička (8_3) konfiguracija naziva se *Möbius-Kantorovom* konfiguracijom. Napišite njezinu incidencijsku matricu! Može li se realizirati kao geometrijska (8_3) konfiguracija?
7. Dobiva li se svaka geometrijska (9_3) konfiguracija s pomoću Papusova teorema, a geometrijska (10_3) konfiguracija s pomoću Desarguesova teorema?