

Domaća zadaća 4

1. "Linearnoalgebarski" dokažite da Gaussovi koeficijenti zadovoljavaju identitete

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_q \quad \text{i} \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q.$$

2. U projektivnom prostoru $PG(3, q)$ prebrojite ukupan broj točaka, pravaca i ravnina. Za fiksnu točku T , koliko ima pravaca i ravnina kroz T ? Koliko ima ravnina kroz fiksni pravac?

3. Prva dva aksioma projektivne ravnine su:

(P_1) Kroz svake dvije točke prolazi jedan pravac.

(P_2) Svaka dva pravca sijeku se u jednoj točki.

Uz ta dva aksioma, pokažite da su sljedeće dvije tvrdnje ekvivalentne:

(N) Postoje četiri točke od kojih nikoje tri nisu kolinearne.

(N') Postoje dva pravca. Na svakom pravcu leže barem tri točke.

Prva dva aksioma afine ravnine su:

(A_1) Kroz svake dvije točke prolazi jedan pravac.

(A_2) Za svaki pravac p i točku T koji nisu incidentni, postoji točno jedan pravac kroz T koji ne siječe p .

Pokažite primjerom da uz ta dva aksioma tvrdnje (N) i (N') nisu ekvivalentne. Formulirajte odgovarajući aksiom (N'') za afinu ravninu, ekvivalentan s (N) .

4. *Steinerov dizajn* s parametrima $2-(v, k, 1)$ ili $S(2, k, v)$ je konačna incidencijska struktura s v točaka, u kojoj na svakom pravcu leži k točaka i kroz svake dvije točke prolazi jedan pravac. Pokažite da tada kroz svaku točku prolazi $r = \frac{v-1}{k-1}$ pravaca i ukupan broj pravaca je $b = \frac{v(v-1)}{k(k-1)}$.

5. Pokažite da je svaki Steinerov dizajn s parametrima oblika $2-(n^2, n, 1)$ konačna afina ravnina, tj. da zadovoljava aksiom (A_2) .

6. Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor nad poljem F i $GL(V)$ skup svih regularnih linearnih operatora $f : V \rightarrow V$ s kompozicijom kao grupovnom operacijom. Neka je $\mathcal{S} = \{f \in GL(V) \mid f(x) = \alpha x, \text{ za neki } \alpha \in F, \alpha \neq 0\}$ skup svih skalarnih operatora. Dokažite:

(a) $\mathcal{S}$ je normalna podgrupa od $GL(V)$.

(b) $\mathcal{S}$ je centar grupe $GL(V)$, tj. $f \in \mathcal{S} \iff f \circ g = g \circ f, \forall g \in GL(V)$.

(c) $f \in \mathcal{S}$ ako i samo ako fiksira sve jednodimenzionalne potprostore od V : $f(\langle a \rangle) = \langle a \rangle, \forall a \in V, a \neq 0$.

7. "Izguglajte" nekoliko kartaških igara vezanih uz konačne afine ili projektivne geometrije, ili izmislite vlastitu takvu kartašku igru!