Domaća zadaća 2

1. Ispišite homogene koordinate svih točaka i pravaca projektivne ravnine $PG(2,3)$ i njezinu incidencijsku matricu. Pokušajte nacrtati tu ravninu.

2. Ponovite osnove definicije iz linearne algebre!

3. Neka su $A = (1 : 4 : 0 : 7)$, $B = (1 : 2 : -1 : 3)$, $C = (-1 : 0 : 2 : 1)$, $D = (3 : 2 : -5 : 1)$ četiri točke u projektivnom prostoru $PG(3,\mathbb{R})$. Dokažite da su kolinearne i izračunajte dvoomjer (AB, CD).

4. Neka su A, B, C, D četiri točke na pravcu p i A', B', C', D' četiri točke na pravcu q koje su cetralno perspektivne, tj. takve da je $A' = q \cap OA$, $B' = q \cap OB$, $C' = q \cap OC$ i $D' = q \cap OD$ za neku točku O (centar perspektiviteta). Dokažite da je tada $(AB, CD) = (A'B', C'D')$.

5. Odredite homogene koordinate ravnine u projektivnom prostoru $PG(3,\mathbb{R})$ koja sadrži točke $A = (1 : 0 : 2 : 1)$, $B = (1 : 1 : 0 : 2)$ i $C = (0 : 1 : 1 : 3)$.

6. U projektivnom prostoru $PG(3, F)$ dokažite da je presjek svake dvije ravnine pravac. Nađite primjer dvaju pravaca u $PG(3, F)$ koji su mimoilazni (tj. disjunktni).

7. Dokažite da svaki skup od tri mimoilazna pravca u $PG(3,\mathbb{R})$ ima beskonačno mnogo transverzala. Pokažite primjerom da skup od četiri mimoilazna pravca u $PG(3,\mathbb{R})$ ne mora imati transverzalu.

8. Neka su ℓ_1, ℓ_2 i ℓ_3 tri mimoilazna pravca u $PG(3, q)$ (trodimenzionalnom projektivnom prostoru nad konačnim poljem $\mathbb{F}_q$). Koliko transverzala ima skup $\{\ell_1, \ell_2\}$, a koliko ima $\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$?

9. Dokažite da skup od tri mimoilazna pravca u $PG(4, F)$ uvijek ima transverzalu, a u $PG(n, F)$, $n \geq 5$ ne mora imati transverzalu.