

Domaća zadaća 2

Model hiperbolične ravnine H^2

1. Neka je $P = (0, 0, 1)$ točka i ℓ pravac s polom $n = (1, 1, 1)$ u modelu H^2 . Odredite polove svih pravaca kroz točku P koji su (a) paralelni s pravcem ℓ , (b) ultraparalelni s pravcem ℓ , (c) sijeku pravac ℓ .
2. Dokažite da je formulom $d(P, Q) = \text{arch}(-b(P, Q))$ zadana metrika na H^2 (Ryan, str. 157-158).
3. Ako su A i B točke iz H^2 , dokažite da je $P = \frac{1}{\|A+B\|} (A+B)$ polovište dužine $\overline{AB}$, tj. da je P točka iz H^2 koja leži na pravcu AB i jednako je udaljena od A i B .
4. *Simetrala dužine $\overline{AB}$* je okomica na pravac AB kroz polovište te dužine. U modelu H^2 dokažite: točka P leži na simetrali dužine $\overline{AB}$ ako i samo ako je jednako udaljena od njezinih krajeva: $d(P, A) = d(P, B)$.
5. Neka kut $\angle ABC$ nije ispružen i neka mu krakovi imaju vektore smjera u i v . Dokažite da je vektor smjera simetrale tog kuta $\frac{1}{\|u+v\|}(u+v)$.
6. Neka je P točka i ℓ pravac s polom n u modelu H^2 . Izvedite formulu za nožište okomice iz P na pravac ℓ i za udaljenost točke P od pravca ℓ .
7. Definirajte simetralu kuta. Dokažite da točka P iz unutrašnjosti kuta $\angle ABC$ leži na njegovoj simetrali ako i samo ako je jednako udaljena od krakova $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{BC}$.
8. Dokažite da u modelu H^2 vrijedi dualni teorem o kosinusu: ako su α, β i γ mjere kutova trokuta, a c duljina stranice nasuprot kutu γ , onda je

$$\cos \gamma = \sin \alpha \sin \beta \operatorname{ch} c - \cos \alpha \cos \beta.$$