

Domaća zadaća 9

1. Neka je $\Pi(x)$ kut paralelnosti za udaljenost $x > 0$. Na str. 73 skripte izveli smo formulu $\operatorname{tg} \Pi(x) = \frac{1}{\operatorname{sh} x}$. Na sličan način izvedite formule $\sin \Pi(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$ i $\cos \Pi(x) = \operatorname{th} x$.
2. Neka je v duljina visine na hipotenuzu $\overline{AB}$ jednakokračnog pravokutnog trokuta ABC ($\gamma = \frac{\pi}{2}$, $|AC| = |BC|$). Dokažite da je skup svih mogućih vrijednosti koje poprima v omeđen odozgo i odredite mu supremum. Taj broj se zove *Schweikartova konstanta*.
3. Neka je $ABCD$ Lambertov četverokut s pravim kutovima u vrhovima A, B, C i stranicama duljina $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$. Dokažite da tada vrijedi $\operatorname{sh} c = \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{ch} d$ i $\operatorname{th} c = \operatorname{th} a \cdot \operatorname{ch} b$. Nadalje, ako je δ mjera kuta u vrhu D , dokažite da vrijedi $\sin \delta = \frac{\operatorname{ch} a}{\operatorname{ch} c} = \frac{\operatorname{ch} b}{\operatorname{ch} d}$ i $\cos \delta = \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{sh} b = \operatorname{th} c \cdot \operatorname{th} d$.
4. Neka je $ABCD$ Lambertov četverokut s pravim kutovima u vrhovima A, B, C i stranicama duljine $|AB| = |BC| = x$. Ako je E točka na stranici $\overline{CD}$ takva da je $|BE| = |AD|$, dokažite da je $\angle ABE = \Pi(x)$.
5. Neka je $ABCD$ Saccherijev četverokut s pravim kutovima u vrhovima A, B , donjom osnovicom duljine $a = |AB|$, krakovima duljine $b = |BC| = |DA|$ i gornjom osnovicom duljine $c = |CD|$. Izvedite relaciju između veličina a, b, c te formulu za mjeru kuta u vrhovima C i D .

Površina

6. Uz oznake kao u 3. zadatku, izrazite površinu Lambertova četverokuta preko duljina stranica a i b . Koji uvjet zadovoljavaju brojevi $a, b > 0$ ako postoji Lambertov četverokut s tim duljinama stranica?
7. Izvedite formulu za površinu pravokutnog hiperboličnog trokuta s katetama duljina a i b .
8. Izvedite formulu za površinu jednakostraničnog hiperboličnog trokuta sa stranicom duljine a .

Hiperbolična trigonometrija

U pravokutnom trokutu $\triangle ABC$ s pravim kutom pri vrhu C , hipotenuzom duljine c , katetama duljina a , b i nasuprotnim kutovima mjera α , β vrijedi:

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b$$

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{sh} c} \quad \cos \alpha = \frac{\operatorname{th} b}{\operatorname{th} c} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{sh} b}$$

$$\sin \beta = \frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{sh} c} \quad \cos \beta = \frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{th} c} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{th} b}{\operatorname{sh} a}$$

U trokutu $\triangle ABC$ sa stranicama duljina a , b , c i nasuprotnim kutovima mjera α , β , γ vrijedi:

$$\frac{\operatorname{sh} a}{\sin \alpha} = \frac{\operatorname{sh} b}{\sin \beta} = \frac{\operatorname{sh} c}{\sin \gamma}$$

$$\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c \cos \alpha$$

$$\operatorname{ch} b = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} c \cos \beta$$

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \cos \gamma$$

$$\cos \alpha = \sin \beta \sin \gamma \operatorname{ch} a - \cos \beta \cos \gamma$$

$$\cos \beta = \sin \alpha \sin \gamma \operatorname{ch} b - \cos \alpha \cos \gamma$$

$$\cos \gamma = \sin \alpha \sin \beta \operatorname{ch} c - \cos \alpha \cos \beta$$