

Domaća zadaća 2

Prostor Minkowskog

1. Dokažite da vremenski vektori ne mogu biti okomiti, tj. da za svaka dva vremenska vektora u, v vrijedi $b(u, v) \neq 0$. Pokažite primjerom da prostorni vektori u, v i svjetlosni vektori u, v mogu biti okomiti.
2. Dokažite formulu za vektorski produkt u prostoru Minkowskog: ako je $u = (u_1, u_2, u_3)$ i $v = (v_1, v_2, v_3)$, onda je

$$u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} e_2 - \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} e_3.$$

Pritom su $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ i $e_3 = (0, 0, 1)$ vektori kanonske baze.

3. Neka su u i v vremenski vektori. Dokažite da je tada $u \times v$ nulvektor ili prostorni vektor.
4. Neka su u i v jedinični prostorni vektori. Pokažite primjerom da $u \times v$ može biti prostorni, vremenski ili svjetlosni vektor.
5. Neka su u i v prostorni vektori takvi da postoji vremenski vektor w okomit na u i na v . Dokažite da je tada $u \times v$ nulvektor ili vremenski vektor.

Model hiperbolične ravnine H^2

6. Neka su $A = (-2, -2, 3)$ i $B = (4, -8, 9)$ točke hiperbolične ravnine H^2 . Odredite pol (jediničnu normalu) pravca AB .
7. Neka su ℓ_1 i ℓ_2 pravci hiperbolične ravnine H^2 s polovima $n_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{6}, 0, \sqrt{2})$ i $n_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{6}, \sqrt{6}, 2\sqrt{2})$. Odredite sjecište ta dva pravca.
8. Neka je ℓ pravac s polom $n = (3, 1, 3)$ i $T = (2, 2, 3)$ točka u H^2 . Odredite polove paralela s ℓ kroz T , bar tri ultraparalele s ℓ kroz T i okomice na ℓ kroz T .
9. Neka su ℓ_1 i ℓ_2 pravci s polovima $n_1 = (1, 2, 2)$ i $n_2 = (2, -1, 2)$. Dokažite da su ℓ_1 i ℓ_2 ultraparalelni i odredite pol njihove zajedničke normale.