1	2	3	4	5	6	Σ

Matični Broj

Ime i Prezime

Neeuklidska geometrija - drugi kolokvij, 2.2.2023.

1. **(6 bodova)** Definirajte pravokutnik. Pretpostavimo da postoji pravokutnik sa susjednim stranicama duljina a i b. Dokažite bez pozivanja na aksiom o paralelama da za svaki prirodan broj n postoji pravokutnik sa susjednim stranicama duljina $n \cdot a$ i b.

2. **(6 bodova)** Deltoid je četverokut $ABCD$ takav da je $|AB| = |BC|$ i $|CD| = |DA|$. Dokažite bez pozivanja na aksiom o paralelama da su dijagonale deltoida okomite. Ako je $ABCD$ deltoid u hiperboličnoj ravnini, u kakvom odnosu mogu biti pravci AB i CD? Mogu li se sijeći, biti paralelni, biti ultraparalelni?

3. **(6 bodova)** Dokažite: ako su odgovarajući kutovi trokuta ΔABC i $\Delta A'B'C'$ u hiperboličnoj ravnini sukladni ($\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ i $\gamma = \gamma'$), onda su ta dva trokuta sukladna.

4. **(6 bodova)** Definirajte kut paralelnosti $\Pi : \langle 0, +\infty \rangle \to \mathbb{R}$ i dokažite da je neprekidna funkcija. Koristeći se formulama hiperbolične trigonometrije dokažite da vrijedi $\sin \Pi(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$.

5. **(6 bodova)** Neka je $ABCD$ Lambertov četverokut s pravim kutovima u vrhovima A, B, C i stranicama duljine $|AB| = |BC| = x$. Ako je E točka na stranici $\overline{CD}$ takva da je $|BE| = |AD|$, dokažite da je $\measuredangle ABE = \Pi(x)$. Dokažite formulu za odnos duljina stranica Lambertova četverokuta koju ste koristili!

6. **(5 bodova)** Za svaku od sljedećih tvrdnji napišite vrijedi li u euklidskoj ravnini (E: T ili N) i vrijedi li u hiperboličnoj ravnini (H: T ili N).

1. Duljina hipotenuze pravokutnog trokuta jednoznačno je određena s duljinama kateta.
2. Duljina hipotenuze pravokutnog trokuta jednoznačno je određena s mjerama kutova uz hipotenuzu.
3. Ako pravci a, b imaju zajedničku normalu i pravci b, c imaju zajedničku normalu, onda pravci a, c imaju zajedničku normalu.
4. Moguće je popločati ravninu sa sukladnim jednakostraničnim trokutima.
5. Ako su odgovarajući kutovi četverokuta $ABCD$ i $A'B'C'D'$ sukladni ($\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ i $\delta = \delta'$), onda su ta dva četverokuta sukladna.

Na kolokviju je dozvoljeno koristiti pribor za pisanje, kalkulator i formule na stražnjoj stranici papira.

Vedran Krčadinac

Hiperbolična trigonometrija

U pravokutnom trokutu ΔABC s pravim kutom pri vrhu C, hipotenuzom duljine c, katetama duljina a, b i nasuprotnim kutovima mjera α, β vrijedi:

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b$$

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{sh} c} \qquad \cos\alpha = \frac{\operatorname{th} b}{\operatorname{th} c} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{sh} b}$$

$$\sin\beta = \frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{sh} c} \qquad \cos\beta = \frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{th} c} \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{th} b}{\operatorname{sh} a}$$

U trokutu ΔABC sa stranicama duljina a, b, c i nasuprotnim kutovima mjera α, β, γ vrijedi:

$$\frac{\operatorname{sh} a}{\sin\alpha} = \frac{\operatorname{sh} b}{\sin\beta} = \frac{\operatorname{sh} c}{\sin\gamma}$$

$$\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b\ \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} b\ \operatorname{sh} c\ \cos\alpha$$
$$\operatorname{ch} b = \operatorname{ch} a\ \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} a\ \operatorname{sh} c\ \cos\beta$$
$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a\ \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a\ \operatorname{sh} b\ \cos\gamma$$

$$\cos\alpha = \sin\beta\sin\gamma\operatorname{ch} a - \cos\beta\cos\gamma$$
$$\cos\beta = \sin\alpha\sin\gamma\operatorname{ch} b - \cos\alpha\cos\gamma$$
$$\cos\gamma = \sin\alpha\sin\beta\operatorname{ch} c - \cos\alpha\cos\beta$$