Domaća zadaća 6

1. Neka je $\Pi(x)$ kut paralelnosti za udaljenost $x > 0$. Na str. 73 skripte izveli smo formulu $\operatorname{tg}\Pi(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sh} x}$. Na analogan način izvedite formule $\sin\Pi(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$ i $\cos\Pi(x) = \operatorname{th} x$.

2. Neka je $ABCD$ Lambertov četverokut s pravim kutovima u vrhovima A, B, C i stranicama duljina $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$. Dokažite da tada vrijedi $\operatorname{sh} c = \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{ch} d$ i $\operatorname{th} c = \operatorname{th} a \cdot \operatorname{ch} b$. Nadalje, ako je δ mjera kuta u vrhu D, dokažite da vrijedi $\sin\delta = \dfrac{\operatorname{ch} a}{\operatorname{ch} c} = \dfrac{\operatorname{ch} b}{\operatorname{ch} d}$ i $\cos\delta = \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{sh} b = \operatorname{th} c \cdot \operatorname{th} d$.

3. Neka je $ABCD$ Saccherijev četverokut s pravim kutovima u vrhovima A, B, donjom osnovicom duljine $a = |AB|$, krakovima duljine $b = |BC| = |DA|$ i gornjom osnovicom duljine $c = |CD|$. Izvedite relaciju između veličina a, b, c te formulu za mjeru kuta u vrhovima C i D.

4. János Bolyai otkrio je sljedeću geometrijsku konstrukciju kuta paralelnosti. Neka su točka T i pravac ℓ na udaljenosti $x = d(T, \ell) > 0$. Spustimo okomicu iz T na ℓ s nožištem N, tako da je $|TN| = x$. Izaberemo bilo koju točku $P \neq N$ na ℓ i neka je m okomica kroz P na ℓ. Zatim spustimo okomicu iz T na m s nožištem M i označimo $r = |TM|$. Tada je $r > |NP|$ i $r < |NM|$ (zašto?), pa kružnica sa središtem N i polumjerom r siječe dužinu $\overline{PM}$ u nekoj točki O. Dokažite da je $\measuredangle NOP = \Pi(x)$. Posebno, mjera tog kuta ne ovisi o izboru točke P.

5. Uz oznake kao u 2. zadatku, izrazite površinu Lambertova četverokuta preko duljina stranica a i b. Koji uvjet zadovoljavaju brojevi $a, b > 0$ ako postoji Lambertov četverokut s tim duljinama stranica?

6. Izvedite formulu za površinu jednakostraničnog hiperboličnog trokuta sa stranicom duljine a.

7. Izvedite formulu za površinu Saccherijeva četverokuta.

Hiperbolična trigonometrija

U pravokutnom trokutu ΔABC s pravim kutom pri vrhu C, hipotenuzom duljine c, katetama duljina a, b i nasuprotnim kutovima mjera α, β vrijedi:

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b$$

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{sh} c} \qquad \cos\alpha = \frac{\operatorname{th} b}{\operatorname{th} c} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{sh} b}$$

$$\sin\beta = \frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{sh} c} \qquad \cos\beta = \frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{th} c} \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{th} b}{\operatorname{sh} a}$$

U trokutu ΔABC sa stranicama duljina a, b, c i nasuprotnim kutovima mjera α, β, γ vrijedi:

$$\frac{\operatorname{sh} a}{\sin\alpha} = \frac{\operatorname{sh} b}{\sin\beta} = \frac{\operatorname{sh} c}{\sin\gamma}$$

$$\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b\ \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} b\ \operatorname{sh} c\ \cos\alpha$$
$$\operatorname{ch} b = \operatorname{ch} a\ \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} a\ \operatorname{sh} c\ \cos\beta$$
$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a\ \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a\ \operatorname{sh} b\ \cos\gamma$$

$$\cos\alpha = \sin\beta\sin\gamma\operatorname{ch} a - \cos\beta\cos\gamma$$
$$\cos\beta = \sin\alpha\sin\gamma\operatorname{ch} b - \cos\alpha\cos\gamma$$
$$\cos\gamma = \sin\alpha\sin\beta\operatorname{ch} c - \cos\alpha\cos\beta$$