

Domaća zadaća 5

1. Neka je $\triangle ABC$ trokut u hiperboličnoj ravnini i P, Q, R redom polovišta stranica $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$. Dokažite da je simetrala stranice \overline{BC} ujedno zajednička normala pravaca QR i BC (dakle, ta dva pravca su ultraparalelna). Je li duljina srednjice $|QR|$ veća, manja ili jednaka $\frac{1}{2}|BC|$?
2. Neka su $ABCD$ i $A'B'C'D'$ dva Lambertova četverokuta s mjerama oštrog kuta δ i δ' . Dokažite: ako je $\delta = \delta'$ i $|AB| = |A'B'|$, onda su ta dva četverokuta sukladna.
3. Dokažite da osnovice Saccherijeva četverokuta leže na ultraparalelnim pravcima. Na kakvim pravcima leže njegovi krakovi?
4. *Pseudopravokutnik* je četverokut u hiperboličnoj ravnini kojem su sva četiri kuta sukladna. Dokažite da su nasuprotne stranice pseudopravokutnika sukladne i da leže na ultraparalelnim pravcima.
5. *Romb* je četverokut kojem su sve četiri stranice sukladne. Bez korištenja aksioma o paralelama dokažite: četverokut je romb ako i samo ako mu se dijagonale raspolažuju i sijeku pod pravim kutom. Na kakvim pravcima leže nasuprotne stranice romba u hiperboličnoj ravnini: paralelnim, ultraparalelnim ili pravcima koji se sijeku?
6. Četverokut kojem su nasuprotne stranice sukladne nazivamo *paralelogramom*. Bez korištenja aksioma o paralelama dokažite: četverokut je paralelogram ako i samo ako mu se dijagonale raspolažuju.
- 7* Bez korištenja aksioma o paralelama dokažite: četverokut je paralelogram ako i samo ako su mu nasuprotni kutovi sukladni.
8. Dokažite da su pravokutnici u euklidskoj ravnini paralelogrami. Jesu li Lambertovi i Saccherijevi četverokuti u hiperboličnoj ravnini paralelogrami? Dokažite da u hiperboličnoj ravnini postoje paralelogrami.
9. (a) Dokažite da u hiperboličnoj ravnini nasuprotne stranice paralelograma leže na ultraparalelnim pravcima.
 (b) Dokažite da za svaka dva ultraparalelna pravca i za svaki $a > 0$ postoji paralelogram sa stranicama duljine a na ta dva pravca. Je li time jednoznačno određena duljina drugog para nasuprotnih stranica?
 (c) Mogu li oba para nasuprotnih stranica četverokuta ležati na ultraparalelnim pravcima, a da taj četverokut ne bude paralelogram?
10. Izvedite formulu za površinu hiperboličnog pravokutnog trokuta s katetama duljine a i b . Uputa: primijenite funkciju sinus na defekt tog trokuta i koristite hiperbolični Pitagorin teorem $\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} b$, trigonometrijske identitete $\sin \alpha = \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{sh} c}$, $\sin \beta = \frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{sh} c}$, $\cos \alpha = \frac{\operatorname{th} b}{\operatorname{th} c}$, $\cos \beta = \frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{th} c}$ i adicijonu formulu za kosinus $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$.